Exercice 1

On déinit sur $I = \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ la fonction $f \;:\; x \mapsto \cos(x)\sin(x)$.

1. (a) Soit x dans I, montrer que $(f(x))^2 = g(\sin(x))$ où $g \;:\; x \mapsto -x^4 + x^2$.
   (b) Etudier les variations de g.
   (c) Déduire des deux questions précédentes le sens de variation de f^2 sur I.
   (d) En utilisant la question précédente, établir rapidement le tableau de variations de f sur I.
2. Soit un rectangle $ABCD$ inscrit dans le cercle trigonométrique. Pour quelles dimensions ce rectangle aura-t-il une aire maximale ? En ce cas, quelle est l'aire et que peut on dire du rectangle ?

Exercice 2

1. (a) En étudiant les variations de la fonction $f \;:\; x \mapsto \sin(x) - x$, montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $\sin(x) \leq x$.
   (b) En utilisant la même technique, montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $1 - \dfrac{x^2}{2} \leq \cos(x) \leq 1$ puis que
   $x - \dfrac{x^3}{6} \leq \sin(x) \leq x$.
2. On définit deux suites $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ par :

$$u_n = \sin\left(\frac{1}{n^2}\right) + \sin\left(\frac{2}{n^2}\right) + \cdots + \sin\left(\frac{n}{n^2}\right) \text{ et } v_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n}{n^2}.$$

   (a) n étant un entier naturel non nul, donner une expression synthétique de v_n.
   (b) Montrer que pour tout entier naturel n non nul, on a : $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 \leq n^4$.
   (c) Déduire des deux questions précédentes que pour tout entier naturel n non nul, $|u_n - v_n| \leq \dfrac{1}{6n^2}$. Interpréter ce résultat.