Exercice 1 :

1a Soit $x \in I$.

$(f(x))^2 = \cos^2 x \sin^2 x = (1-\sin^2 x) \times \sin^2 x = \sin^2 x - (\sin^2 x)^2 = \sin^2 x - \sin^4 x$

or $g(\sin(x)) = -(\sin(x))^4 + (\sin(x))^2 = -\sin^4 x + \sin^2 x$.

Donc $(f(x))^2 = g(\sin(x))$

1b g est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynomiale.

Soit $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = -4x^3 + 2x = 2x(-2x^2+1) = 2x(1-2x^2) = 2x\underbrace{(1^2 - (\sqrt{2}x)^2)}_{a^2-b^2 = (a-b)(a+b)}$

$= 2x(1-\sqrt{2}x)(1+\sqrt{2}x)$

on fait un tableau de signes pour trouver le signe de $g'(x)$.

x	$-\infty$		$-\frac{1}{\sqrt{2}}$		0		$1/\sqrt{2}$		$+\infty$
$2x$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$1-\sqrt{2}x$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$1+\sqrt{2}x$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

$1-\sqrt{2}x > 0$ ssi $1 > \sqrt{2}x$

ssi $\frac{1}{\sqrt{2}} > x$

et $-\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

voici le tableau de variations de g :

x	$-\infty$		$-1/\sqrt{2}$		0		$1/\sqrt{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$	$-\infty$

$g\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}^4} + \frac{1}{\sqrt{2}^2} = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2}$

$= \frac{1}{4}$

$= g\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} -x^2(x^2-1) = -\infty$ par produit

$\lim_{x \to -\infty} g(x) = \lim_{x \to -\infty} -x^2(x^2-1) = -\infty$ par produit.

1c Méthode qui utilise q1b et q1a

Rappel : soit f une fonction définie sur $\mathcal{D}$

- f est croissante sur $\mathcal{D}$ ssi $\forall x \in \mathcal{D}\ \forall y \in \mathcal{D},\ x<y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$
- f est strictement croissante sur $\mathcal{D}$ ssi $\forall x \in \mathcal{D}\ \forall y \in \mathcal{D},\ x<y \Rightarrow f(x) < f(y)$

Soient $x \in I$ et $y \in I$, avec $x<y$. On va chercher à comparer $f^2(x)$ et $f^2(y)$ càd $g(\sin(x))$ et $g(\sin(y))$

Méthode sans q1b

$f^2 : x \mapsto g(\sin(x))$ est dérivable sur I en tant que composée de fcts dérivables sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in\ ,\ (f^2)'(x) = \cos(x) \times g'(\sin x)$

$\forall x \in I,\ (f^2)'(x) = \cos(x) \times (-4(\sin x)^3 + 2\sin$

(formule $(u \circ v)' = u' \circ v \times v'$

avec $u : x \mapsto g(x)$ et $v : x \mapsto \sin$

$u' : x \mapsto g'(x)$ et $v' : x \mapsto \cos$

càd $u' : x \mapsto -4x^3 + 2x$

$\forall x \in I,\ (f^2)'(x) = 2\cos x \sin x(-2\sin^2 x + 1$

• si $0 \leq x < y \leq \frac{\pi}{4}$ alors, comme sin est strictement croissante sur $[0, \frac{\pi}{4}]$, on a : $\sin(0) \leq \sin(x) < \sin(y) \leq \sin\frac{\pi}{4}$
càd $0 \leq \sin x < \sin y \leq \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$
puis, comme g est st^t croissante sur $[0, \frac{1}{\sqrt{2}}]$ on a : $g(\sin x) < g(\sin y)$.
Donc $f^2(x) < f^2(y)$
Ainsi <u>f^2 est strictement croissante sur $[0, \frac{\pi}{4}]$</u>
(on a utilisé la croissance de sin sur $[0, \frac{\pi}{4}]$ et celle de g sur $[0, \frac{1}{\sqrt{2}}]$).

• De même, si $\frac{\pi}{4} \leq x < y \leq \frac{\pi}{2}$, on a : $\sin(\frac{\pi}{4}) \leq \sin(x) < \sin(y) \leq \sin(\frac{\pi}{2})$
càd $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \leq \sin(x) < \sin(y) \leq 1$
puis, comme g est strictement décroissante sur $[\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty[$, on a : $g(\sin x) > g(\sin y)$
donc $f^2(x) > f^2(y)$.
Ainsi <u>f^2 est strictement décroissante sur $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$</u> (on a utilisé la croissance de sin sur $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$ et la décroissance de g sur $[\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty[$)

1d <u>Méthode utilisant q 1c</u>

Soit $x \in I$ et $y \in I$

• si $0 \leq x < y \leq \frac{\pi}{4}$ alors $f^2(x) < f^2(y)$
et comme $x \mapsto \sqrt{x}$ est str croissante sur $\mathbb{R}$: $\sqrt{f^2(x)} < \sqrt{f^2(y)}$
donc $|f(x)| < |f(y)|$
or $\forall x \in I$, $f(x) = \cos x \sin x \geq 0$
Donc $f(x) < f(y)$ et <u>f strictement croissante sur $[0, \frac{\pi}{4}]$</u>

• si $\frac{\pi}{4} \leq x < y \leq \frac{\pi}{2}$ alors $f^2(x) > f^2(y)$
donc $\sqrt{f^2(x)} > \sqrt{f^2(y)}$ donc $|f(x)| > |f(y)|$
donc $f(x) > f(y)$ et <u>f st^t décroissante sur $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$</u>

$\forall x \in I$, $(f^2)'(x) = 2\cos x \sin x \cos(2x)$
or $\forall x \in I$, $\cos x \geq 0$, $\sin(x) \geq 0$ et
$\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos(2x) \geq 0$ ssi $2x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi]$
$\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos(2x) \geq 0$ ssi $x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [-\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi]$

donc $\forall x \in I$, $\cos(2x) \geq 0$ ssi $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$

Ainsi, $\forall x \in [0, \frac{\pi}{4}]$, $(f^2)'(x) \geq 0$
$\forall x \in]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}[$, $(f^2)'(x) < 0$
et $(f^2)'(\frac{\pi}{2}) = 0$

Donc on a le tableau de variations :

x	0		$\pi/4$		$\pi/2$
$(f^2)'(x)$	0	$+$	0	$-$	0
$f^2(x)$	0	↗	$\frac{1}{4}$	↘	0

$f^2(0) = \cos^2 0 \sin^2 0 = 0$
$f^2(\frac{\pi}{2}) = \cos^2\frac{\pi}{2} \sin^2\frac{\pi}{2} = 0$
$f^2(\frac{\pi}{4}) = \cos^2\frac{\pi}{4} \sin^2\frac{\pi}{4} = (\frac{\sqrt{2}}{2})^2 \times (\frac{\sqrt{2}}{2})^2 = \frac{1}{4}$

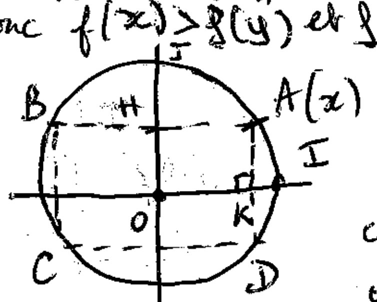
1d <u>Méthode sans utiliser les q précédentes</u>

f est dérivable sur I en tant que produit de fonctions dérivables.
$\forall x \in I$, $f'(x) = -\sin x \times \sin x + \cos x \times \cos x$
$\forall x \in I$ $f'(x) = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos(2x)$
$\forall x \in I$ $f'(x) \geq 0$ ssi $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$

x	0		$\pi/4$		$\pi/2$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↗	$\frac{1}{2}$	↘	0

$f(\frac{\pi}{4}) = \cos\frac{\pi}{4} \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2}$
$f(0) = f(\frac{\pi}{2}) = 0$.

2



$\mathcal{A}_{ABCD} = 4 \times \mathcal{A}_{AHOK} = 4 \times AH \times AK = 4 \times OK \times OH$
$\mathcal{A}_{ABCD} = 4 \times \cos x \times \sin x = 4 \times f(x)$.
L'aire est maximale lorsque $x = \frac{\pi}{4}$ et vaut : $4 \times \frac{1}{2} = 2$ u.a. d'après 1d
On a alors AHOK qui est un carré et ABCD qui [illegible]

Exercice 2

1a) $f : x \mapsto \sin x - x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \cos x - 1 \leq 0$ car $\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos x \leq 1$

On a donc le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	↘	0	↘

$f(0) = \sin 0 - 0 = 0 - 0 = 0$.

Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $f(x) \leq 0$ d'après le tableau de variations de f

Donc $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $\sin x - x \leq 0$ donc $\underline{\forall x \in \mathbb{R}^+, \sin x \leq x}$

1b) • Soit $f_1 : x \mapsto 1 - \frac{x^2}{2} - \cos x$. f_1 est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f_1'(x) = -\frac{2x}{2} + \sin x = \sin x - x \leq 0$, d'après q 1a, si $x \geq 0$

Donc on a le tableau de variations suivant sur $\mathbb{R}^+$:

x	0	$+\infty$
$f_1(x)$	0	↘

$f_1(0) = 1 - \frac{0^2}{2} - \cos 0 = 1 - 0 - 1 = 0$

Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $f_1(x) \leq 0$ donc $\forall x \in \mathbb{R}^+$ $1 - \frac{x^2}{2} - \cos x \leq 0$, donc $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos x$. De plus $\forall x \in \mathbb{R}$ $\cos x \leq 1$ Donc :

$\underline{\forall x \in \mathbb{R}^+, 1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos x \leq 1}$ (double inégalité ou encadrement)

• Soit $f_2 : x \mapsto x - \frac{x^3}{6} - \sin x$. f_2 est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f_2'(x) = 1 - \frac{3x^2}{6} - \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} - \cos x \leq 0$ si $x \geq 0$ d'après ce qui précède.

Donc on a le tableau de variations suivant sur $\mathbb{R}^+$:

x	0	$+\infty$
$f_2(x)$	0	↘

$f_2(0) = 0 - \frac{0^3}{6} - \sin 0 = 0 - 0 - 0 = 0$

Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $f_2(x) \leq 0$ donc $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $x - \frac{x^3}{6} - \sin x \leq 0$

$\forall x \in \mathbb{R}^+$, $x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x$. De plus $\forall x \in \mathbb{R}^+$ $\sin x \leq x$ d'après q 1a. Donc : $\underline{\forall x \in \mathbb{R}^+, x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x}$

② ⓐ Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k$ par linéarité de la somme.

$v_n = \frac{1}{n^2} \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2n}$.

② ⓑ Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3$. Or $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $k^3 \leq n^3$

Donc $\sum_{k=1}^{n} k^3 \leq \sum_{k=1}^{n} n^3$ (on somme ces n inégalités, pour k allant de 1 à n).

or $\sum_{k=1}^{n} n^3 = (n-1+1) \times n^3 = n^4$

Donc $\sum_{k=1}^{n} k^3 \leq n^4$ et $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 \leq n^4$.

② ⓒ Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$u_n - v_n = \underset{\xrightarrow{q\,2a}}{\sum_{k=1}^{n}} \sin\left(\frac{k}{n^2}\right) - \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} \overset{\text{par linéarité de la somme}}{=} \sum_{k=1}^{n} \left(\sin\left(\frac{k}{n^2}\right) - \frac{k}{n^2}\right)$

Par ailleurs, reprenons le résultat de la q 1b :

$\forall x \in \mathbb{R}^+$, $x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x$. En soustrayant x on obtient :

$\forall x \in \mathbb{R}^+$, $x - \frac{x^3}{6} - x \leq \sin x - x \leq 0$ càd $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $-\frac{x^3}{6} \leq \sin x - x \leq$

Ainsi, $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $\frac{k}{n^2} \in \mathbb{R}^+$ donc $\frac{-\left(\frac{k}{n^2}\right)^3}{6} \leq \sin \frac{k}{n^2} - \frac{k}{n^2} \leq 0$,

ou encore : $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $\frac{-k^3}{6n^6} \leq \sin \frac{k}{n^2} - \frac{k}{n^2} \leq 0$.

On somme ces n encadrements, pour k allant de 1 à n.

On obtient : $\sum_{k=1}^{n} \frac{-k^3}{6n^6} \leq \sum_{k=1}^{n} \left(\sin\left(\frac{k}{n^2}\right) - \frac{k}{n^2}\right) \leq \sum_{k=1}^{n} 0$

càd, par linéarité de la somme :

$-\frac{1}{6n^6} \sum_{k=1}^{n} k^3 \leq u_n - v_n \leq 0$. $\quad (*)$

Comme $u_n - v_n \leq 0$, $|u_n - v_n| = -(u_n - v_n) = v_n - u_n$

On multiplie $(*)$ par (-1). Il vient :

$\frac{1}{6n^6} \sum_{k=1}^{n} k^3 \geqslant v_n - u_n \geqslant 0$, càd $0 \leq v_n - u_n \leq \frac{1}{6n^6} \sum_{k=1}^{n} k^3$

Finalement, comme $\sum_{k=1}^{n} k^3 \leq n^4$ (q 2b),

$$\frac{1}{6n^6}\sum_{k=1}^{n} k^3 \leq \frac{1}{6n^6} \times n^4 = \frac{n^4}{6n^6} = \frac{1}{6n^2} \quad , \text{ car } \frac{1}{6n^6} \geqslant 0$$

Ainsi, $0 \leq v_n - u_n \leq \frac{1}{6n^6}\sum_{k=1}^{n} k^3 \leq \frac{1}{6n^2}$

Conclusion : $|v_n - u_n| = v_n - u_n \leq \frac{1}{6n^2}$

Interprétation : on a montré que pour tout n entier naturel non nul, $0 \leq v_n - u_n \leq \frac{1}{6n^2}$

or $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{6n^2} = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} 0 = 0$

Donc d'après le théorème des gendarmes (ou théorème d'encadrement), $(v_n - u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite qui admet une limite lorsque n tend vers $+\infty$, et cette limite vaut 0.

De plus d'après la q 2a, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}$

Donc, comme $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2n} = 0$, on peut affirmer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ admet une limite lorsque n tend vers $+\infty$ et $\lim_{n\to+\infty} v_n = \frac{1}{2}$.

On peut donc en déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ admet aussi une limite lorsque n tend vers $+\infty$, puisque :

$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = v_n + u_n - v_n = v_n - (v_n - u_n)$

et puisque $\lim_{n\to+\infty} v_n = \frac{1}{2}$ et $\lim_{n\to+\infty} v_n - u_n = 0$

Par somme, on obtient que $\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$

Ainsi, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont des suites convergentes et elles convergent toutes les deux vers $\frac{1}{2}$.

Autre interprétation : Pour $n \in \mathbb{N}^*$ donné, l'erreur commise en choisissant v_n pour approximation de u_n est au plus de $\frac{1}{\ldots}$