CORRIGE DE LA COLLE BLANCHE

Ex 3

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{p}(i+j)\right) \overset{\text{linéarité de la somme}}{=} \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{p} i + \sum_{j=1}^{p} j\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(i\times p + \frac{p(p+1)}{2}\right) \overset{\text{linéarité de la somme}}{=} p\sum_{i=1}^{n} i + \frac{p(p+1)}{2}\sum_{i=1}^{n} 1$$

$$= p\,\frac{n(n+1)}{2} + \frac{p(p+1)}{2}\times n = \frac{pn}{2}\left[(n+1)+(p+1)\right] = \boxed{\frac{pn}{2}\left[n+p+2\right]}$$

$$\sum_{j=0}^{n}\sum_{i=j}^{n}\binom{i}{j} = \sum_{0\leq j\leq i\leq n}\binom{i}{j} = \sum_{i=0}^{n}\left(\sum_{j=0}^{i}\binom{i}{j}\right) \overset{\text{formule du binôme}}{=} \sum_{i=0}^{n} 2^{i} = \frac{1-2^{n+1}}{1-2} = \boxed{2^{n+1}-1}$$

$$\sum_{i=0}^{n}\left(\sum_{j=i}^{n}\frac{i}{j+1}\right) = \sum_{0\leq i\leq j\leq n}\frac{i}{j+1} = \sum_{j=0}^{n}\left(\sum_{i=0}^{j}\frac{i}{j+1}\right) \overset{\text{linéarité de la somme}}{=} \sum_{j=0}^{n}\frac{1}{j+1}\left(\sum_{i=0}^{j} i\right)$$

$$= \sum_{j=0}^{n}\frac{1}{j+1}\,\frac{j(j+1)}{2} = \sum_{j=0}^{n}\frac{j}{2} \overset{\text{linéarité de la somme}}{=} \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n} j = \boxed{\frac{n(n+1)}{4}}$$

Ex 4

Soient n et k deux entiers avec $0 \leq k \leq n$

$$(n+1)\binom{n}{k} = (n+1)\frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{(n+1)!}{k!(n-k)!}$$

D'autre part $(k+1)\binom{n+1}{k+1} = (k+1)\dfrac{(n+1)!}{(k+1)!\,(n+1-(k+1))!}$

$$= \frac{(n+1)!}{k!\,(n-k)!} \quad \text{car } \frac{k+1}{(k+1)!} = \frac{1}{k!}$$

donc $\boxed{(n+1)\binom{n}{k} = (k+1)\binom{n+1}{k+1}}$ et donc $\dfrac{1}{k+1}\binom{n}{k} = \dfrac{1}{n+1}\binom{n+1}{k+1}$

Ainsi $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{n+1}\binom{n+1}{k+1} \overset{\text{linéarité de la somme}}{=} \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k+1}$

changement d'indice $j=k+1$:

$$= \frac{1}{n+1}\sum_{j=1}^{n+1}\binom{n+1}{j} = \frac{1}{n+1}\left(\sum_{j=0}^{n+1}\binom{n+1}{j} - \sum_{j=0}^{0}\binom{n+1}{j}\right)$$

$$\overset{\text{formule du binôme}}{=} \boxed{\frac{1}{n+1}\left(2^{n+1}-1\right)} \quad \text{car } \binom{n+1}{0} = 1.$$

Exercice 1

linéarité de la somme

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{3^{k+2}}{5^{2k-1}} = \sum_{k=0}^{n} \frac{3^k \times 3^2}{5^{2k}\times 5^{-1}} \xrightarrow{} = \frac{3^2}{5^{-1}} \sum_{k=0}^{n} \frac{3^k}{(5^2)^k} = 3^2 \times 5 \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{3}{5^2}\right)^k$$

$$= 45 \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{3}{25}\right)^k = \boxed{45 \frac{1-\left(\frac{3}{25}\right)^{n+1}}{1-\frac{3}{25}}}$$

$$\sum_{k=0}^{n} q^k$$

$$\sum_{k=0}^{2n} \min(n,k) = \sum_{k=0}^{n} \min(n,k) + \sum_{k=n+1}^{2n} \min(n,k)$$ par la relation de Chasles

$$= \sum_{k=0}^{n} k + \sum_{k=n+1}^{2n} n = \frac{n(n+1)}{2} + (2n-(n+1)+1)\times n$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} + (2n-1+1)\times n = n\left(\frac{n+1}{2}+n\right) = \boxed{\frac{n(3n+1)}{2}}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{(2k+1)k}{(k+1)(2k-1)}\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(\ln\left(\frac{2k+1}{2k-1}\right) + \ln\left(\frac{k}{k+1}\right)\right)$$ par linéarité de la somme

$$= \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{2k+1}{2k-1}\right) + \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k}{k+1}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(\ln(2k+1) - \ln(2k-1)\right) + \sum_{k=1}^{n} \left(\ln k - \ln(k+1)\right)$$ on reconnaît deux sommes telescopiques

$$= \ln(2n+1) - \ln(2\times 1-1) + \ln 1 - \ln(n+1)$$

$$= \ln(2n+1) - \ln(n+1) = \boxed{\ln\left(\frac{2n+1}{n+1}\right)}$$

Exercice 2

① Soit $x \in \mathbb{R}$. $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ssi $\sin x = \sin\frac{\pi}{3}$ ssi $x \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$ ou $x \equiv \pi - \frac{\pi}{3} [2\pi]$

ssi $\boxed{x \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi] \text{ ou } x \equiv \frac{2\pi}{3} [2\pi]}$

Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$ $\tan x = \sqrt{3}$ ssi $\tan x = \tan\frac{\pi}{3}$ ssi $\boxed{x \equiv \frac{\pi}{3} [\pi]}$

② Par la formule de duplication, $\cos\left(2\times\frac{\pi}{8}\right) = 2\cos^2\frac{\pi}{8} - 1$

or $\cos\left(2\times\frac{\pi}{8}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ donc $2\cos^2\frac{\pi}{8} - 1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$

donc $\cos^2\frac{\pi}{8} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}+1}{2}$ et $\cos\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}+1}{2}}$ ou $-\sqrt{\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}+1}{2}}$

De plus $\frac{\pi}{8} \in]0, \frac{\pi}{2}[$ donc $\cos\frac{\pi}{8} > 0$ et $\cos\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}+1}{2}} = \boxed{\frac{\sqrt{\sqrt{2}+2}}{2}}$

③ Soit $x \in \mathbb{R}$

$\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(x + \frac{3\pi}{4}\right)$ ssi $\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(x + \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{2}\right)$

ssi $\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ ssi $2x - \frac{\pi}{3} \equiv x + \frac{\pi}{4} [2\pi]$ ou $2x - \frac{\pi}{3} \equiv -x - \frac{\pi}{4} [2\pi]$

ssi $x \equiv \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} [2\pi]$ ou $3x \equiv -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} [2\pi]$ ssi $\boxed{x \equiv \frac{7\pi}{12} [2\pi] \text{ ou } x \equiv \frac{\pi}{36} \left[\frac{2\pi}{3}\right]}$