Les documents, calculatrices et téléphones portables sont interdits. La clarté et la précision de la rédaction seront prises en compte dans la notation. Les trois exercices sont indépendants et peuvent ne pas être traités dans l'ordre. Il y a matière à valoriser votre travail dans ce devoir, soyez confiants.

Exercice 1

1. Donner sans justifier les dérivées des fonctions u, v et w définies sur $\mathbb{R}$ par : $u\ :\ x \mapsto \cos(3x)$, $v\ :\ x \mapsto \cos^3(x)$ et $w\ :\ x \mapsto \cos(3x)\cos^3(x)$, puis factoriser l'expression $w'(x)$, où x est un réel.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer les sommes $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} 2^k$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 3^k$.
3. Soit f la fonction définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ par $f(x) = \dfrac{\tan(x)}{x}$ lorsque $x \neq 0$ et $f(x) = 1$ si $x = 0$.
   (a) Donner sans justifier la valeur de la limite de $\dfrac{\sin(x)}{x}$ lorsque x tend vers 0. En déduire la valeur de la limite de $\dfrac{tan(x)}{x}$ lorsque x tend vers 0, en revenant à la définition de tan. f est-elle continue en 0 ? Justifier.
   (b) On admet que pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, $x + \dfrac{x^3}{3} \leq \tan(x) \leq x + \dfrac{2x^3}{3}$. En déduire que f est dérivable en 0 et préciser $f'(0)$.

Exercice 2

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{2 + \cos(x)}.$$

1. Déterminer l'ensemble de définition, noté $\mathcal{D}$, de f.
2. Justifier soigneusement que l'étude de f sur $[0, \pi]$ suffit pour étudier f sur $\mathcal{D}$.
3. Montrer que f est dérivable sur $\mathcal{D}$ et déterminer f'.
4. En déduire les variations de f sur $[0, \pi]$.

Tournez s'il-vous plaît !

Exercice 3

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $S_1 = \sum_{k=1}^{n} k$, $S_2 = \sum_{k=1}^{n} k^2$ et $S_3 = \sum_{k=1}^{n} k^3$. Plus généralement, pour $p \in \mathbb{N}$, on pose $S_p = \sum_{k=1}^{n} k^p$. On se propose dans cet exercice de retrouver les expressions simplifiées de S_1, S_2 et S_3 par diverses méthodes. On suppose donc que l'on ne connaît pas ces trois formules.

1. Une première méthode
   (a) i. A l'aide d'un changement d'indice à préciser, montrer que $\sum_{k=1}^{n} k = \sum_{j=1}^{n} (n+1-j)$.
   ii. En déduire que $S_1 = n(n+1) - S_1$ et retrouver ainsi l'expression de S_1, que l'on pourra utiliser pour la suite de cette question 1.
   (b) i. Montrer que $\sum_{k=1}^{n} \left(k^2(k+1) - (k-1)^2 k\right) = n^2(n+1)$.
   ii. En déduire que $3S_2 - S_1 = n^2(n+1)$ et retrouver ainsi l'expression de S_2.
   (c) i. Montrer que $\sum_{1 \leq i,j \leq n} ij = S_1^2$.
   ii. Montrer que $\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} ij = \frac{1}{2}(S_3 + S_2)$.
   iii. Montrer que $\sum_{1 \leq j < i \leq n} ij = \frac{1}{2}(S_3 - S_2)$.
   iv. Déduire des trois questions précédentes l'expression de S_3.
2. **Partie à aborder en fin de devoir, après avoir traité les questions des autres exercices**
   Une deuxième méthode
   (a) En remarquant que $(k+1)^2 - k^2 = 2k+1$, montrer que $n(n+2) = 2S_1 + n$ et en déduire S_1.
   (b) En partant de $(k+1)^3 - k^3$, montrer que $n(n^2+3n+3) = 3S_2 + 3S_1 + n$ et en déduire S_2.
   (c) Donner une méthode sur le même modèle permettant le calcul de S_3 (on ne demande pas de faire explicitement le calcul).
   (d) Généralisation.
   Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $S_p = \frac{1}{p+1}\left((n+1)^{p+1} - 1 - \sum_{i=0}^{p-1} \binom{p+1}{i} S_i\right)$.