Exercice 1 :

① $u' : x \mapsto \underline{-3\sin(3x)}$, $v' : x \mapsto \underline{3\cos^2(x) \times (-\sin x)}$

$w' : x \mapsto -3\sin(3x)\cos^3(x) + \cos(3x)\, 3\cos^2(x) \times (-\sin x)$

Soit $x \in \mathbb{R}$, $w'(x) = -3\cos^2(x)\left[\sin(3x)\cos x + \cos(3x)\sin x\right]$

$w'(x) = -3\cos^2(x)\left[\sin(3x+x)\right] = \underline{-3\cos^2(x)\sin(4x)}$

② Soit $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k}2^k = \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}2^k - \sum_{k=n+1}^{n+1}\binom{n+1}{k}2^k = \underbrace{\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}2^k 1^{n+1-k}}_{\text{formule du binôme}} - \binom{n+1}{n+1}2^{n+1}$$

$$= (2+1)^{n+1} - 2^{n+1} = \boxed{3^{n+1} - 2^{n+1}}$$

$$\sum_{k=1}^{n} 3^k = \frac{3^1 - 3^{n+1}}{1-3} = \frac{3 - 3^{n+1}}{-2} = \boxed{\frac{1}{2}\left(3^{n+1} - 3\right)}$$

③ ⓐ $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \boxed{1}$

Soit $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, $\frac{\tan x}{x} = \frac{\sin x}{x\cos x} = \frac{\sin x}{x} \times \frac{1}{\cos x}$

or cos continue en 0 donc $\lim\limits_{x \to 0} \cos x = \cos 0 = 1$

et $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ donc par produit : $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = 1 \times \frac{1}{1} = 1$

Ainsi $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0)$ et f \underline{est continue en 0.}

ⓑ Soit $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, $\frac{x^3}{3} \leq \tan x - x \leq \frac{2x^3}{3}$

$\div x^2$

$$\frac{x}{3} \leq \frac{\tan x - x}{x^2} \leq \frac{2x}{3}$$

or $\frac{\tan x - x}{x^2} = \frac{\frac{\tan x}{x} - 1}{x}$ donc $\frac{x}{3} \leq \frac{f(x) - f(0)}{x} \leq \frac{2x}{3}$

Par le théorème d'encadrement, comme $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x}{3} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{2x}{3} = 0$

on peut affirmer que $\frac{f(x) - f(0)}{x}$ admet une limite lorsque x tend vers 0 et que cette limite vaut 0

f est donc dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

Exercice 2

(1) Soit $x \in \mathbb{R}$. $x \in \mathcal{D}$ ssi $2+\cos x \neq 0$ puisque cos et sin sont définies sur $\mathbb{R}$.

or $\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos x \in [-1,1]$ donc $2+\cos x \in [1,3]$ donc $2+\cos x \neq 0$

Ainsi $\boxed{\mathcal{D} = \mathbb{R}}$

(2) f est périodique de période 2π car cos et sin le sont.

En effet $\forall x \in \mathbb{R}$, $x+2\pi \in \mathbb{R}$ et $f(x+2\pi) = \dfrac{\sin(x+2\pi)}{2+\cos(x+2\pi)} = \dfrac{\sin x}{2+\cos x} = f(x)$

Donc la courbe représentative de f, $\mathcal{C}_f$ s'obtient par translations successives de vecteurs $2k\pi\vec{i}$, $k \in \mathbb{Z}$ à partir du tracé de $\mathcal{C}_f$ sur $[-\pi,\pi]$

Par ailleurs, f est impaire car cos est paire et sin est impaire.

En effet, $\forall x \in \mathbb{R}$, $-x \in \mathbb{R}$ et $f(-x) = \dfrac{\sin(-x)}{2+\cos(-x)} = -\dfrac{\sin(x)}{2+\cos x} = -f(x)$.

Donc la courbe représentative de f sur $[-\pi,0]$ s'obtient à partir de la courbe représentative de f sur $[0,\pi]$ par symétrie par rapport à l'origine du repère O.

(3) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que quotient défini de fonctions dérivables et pour tout $x \in \mathcal{D}$:

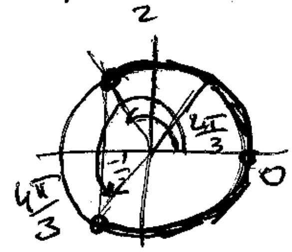
$$f'(x) = \frac{\cos x\,(2+\cos x) - \sin(x)(-\sin x)}{(2+\cos x)^2} = \frac{2\cos x + \cos^2 x + \sin^2 x}{(2+\cos x)^2}$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{2\cos x + 1}{(2+\cos x)^2}}$$

(4) Soit $x \in [0,\pi]$ $\quad 2\cos x + 1 \geq 0$ ssi $\cos x \geq -\frac{1}{2}$

ssi $\cos x \geq \cos\frac{2\pi}{3}$

ssi $x \in \left[0, \frac{2\pi}{3}\right]$



on a donc le tableau de variations suivant :

x	0		$\frac{2\pi}{3}$		π
$f'(x)$			0		
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\searrow$	0

puisque $\forall x \in [0,\pi]$, $(2+\cos x)^2 \geq 0$

$$f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)}{2+\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Exercice 3 Soit $n \in \mathbb{N}^*$

1 a i $\boxed{j = n+1-k}$

ii $S_1 = \sum_{k=1}^{n} k = \sum_{j=1}^{n} (n+1-j) \xrightarrow{\text{par linéarité de la somme}} = \sum_{j=1}^{n}(n+1) - \sum_{j=1}^{n} j = n(n+1) - S_1$

donc $2S_1 = n(n+1)$ et $\boxed{S_1 = \frac{n(n+1)}{2}}$

1 b i on reconnaît une somme télescopique $\sum_{k=1}^{n} a_{k+1} - a_k = a_{n+1} - a_1$

avec $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $a_k = k(k-1)^2$

$a_{n+1} = (n+1)n^2$ et $a_1 = 1 \times 0^2 = 0$

ii $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $k^2(k+1) - (k-1)^2 k = k^3 + k^2 - (k^2+1-2k)k = \cancel{k^3} + k^2 - \cancel{k^3} + 2k^2 - k$

Ainsi $\sum_{k=1}^{n} \left(k^2(k+1) - (k-1)^2 k\right) = \sum_{k=1}^{n} 3k^2 - k = 3\sum_{k=1}^{n} k^2 - \sum_{k=1}^{n} k = 3S_2 - S_1$

par linéarité de la somme

Donc $3S_2 - S_1 = n^2(n+1)$

c-à-d $3S_2 = n^2(n+1) + \frac{n(n+1)}{2} = n(n+1)\left(n+\frac{1}{2}\right) = n(n+1)\frac{(2n+1)}{2}$

donc $\boxed{S_2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$

1 c i $\sum_{1 \le i,j \le n} ij = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} ij = \sum_{i=1}^{n} i\left(\sum_{j=1}^{n} j\right) = \sum_{i=1}^{n} i\,\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}\sum_{i=1}^{n} i$

par linéarité de la somme   par linéarité de la somme

donc $\sum_{1 \le i,j \le n} ij = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = \boxed{S_1^2}$

ii $\sum_{1 \le i \le j \le n} ij = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j} ij = \sum_{j=1}^{n} j\left(\sum_{i=1}^{j} i\right) = \sum_{j=1}^{n} j\,\frac{j(j+1)}{2} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} j^3 + j^2$

par linéarité de la somme   par linéarité de la somme

$= \frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{n} j^3 + \sum_{j=1}^{n} j^2\right) = \boxed{\frac{1}{2}(S_3+S_2)}$

iii $\sum_{1 \le j < i \le n} ij = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i-1} ij = \sum_{i=1}^{n} i\left(\sum_{j=1}^{i-1} j\right) = \sum_{i=1}^{n} i\,\frac{(i-1)i}{2} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(i^3 - i^2)$

par linéarité de la somme

$= \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} i^3 - \sum_{i=1}^{n} i^2\right)$ par linéarité de la somme

$= \boxed{\frac{1}{2}(S_3 - S_2)}$

somme rectangulaire (carrée)   somme triangulaire sup   somme triangulaire inf

iv on a $\sum_{1 \le i,j \le n} ij = \sum_{1 \le i \le j \le n} ij + \sum_{1 \le j < i \le n} ij$ par regroupement de termes

car $\{(i,j) \text{ tq } 1 \le i \le n \text{ et } 1 \le j \le n\} = \{(i,j) \text{ tq } 1 \le i \le j \le n\} \cup \{(i,j) \text{ tq } 1 \le j < i \le n\}$

donc $S_1^2 = \frac{1}{2}(S_3+S_2) + \frac{1}{2}(S_3-S_2) = S_3$

donc $\boxed{S_3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2}$

② ⓐ $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $(k+1)^2 - k^2 = k^2+2k+1-k^2 = 2k+1$

d'où $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left((k+1)^2-k^2\right) = \sum_{k=1}^{n} 2k+1 \xrightarrow[\text{par linéarité}]{} = 2\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1 = 2S_1 + n$

or $\displaystyle\underbrace{\sum_{k=1}^{n} (k+1)^2-k^2}_{\text{somme télescopique } \sum_{k=1}^{n} a_{k+1}-a_k = a_{n+1}-a_1 \text{ avec } a_k = k} = (n+1)^2 - 1^2 = n^2+2n+1-1 = n^2+2n = n(n+2)$

Donc $\underline{2S_1} = n(n+2) - n = n^2+n = \underline{n(n+1)}$ et $\boxed{S_1 = \frac{n(n+1)}{2}}$

ⓑ $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $(k+1)^3-k^3 = k^3+3k^2+3k+1-k^3 = 3k^2+3k+1$.

d'où $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left((k+1)^3-k^3\right) = \sum_{k=1}^{n} 3k^2+3k+1 = 3\sum_{k=1}^{n} k^2 + 3\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1 = 3S_2+3S_1+n$

or $\displaystyle\underbrace{\sum_{k=1}^{n} (k+1)^3-k^3}_{\text{somme télescopique}} = (n+1)^3 - 1^2 = n^3+3n^2+3n+1-1 = n^3+3n^2+3n = n(n^2+3n+3)$

Donc $\underline{3S_2 + 3\frac{n(n+1)}{2} + n = n(n^2+3n+3)}$

donc $3S_2 = n\left[n^2+3n+3-1-\frac{3}{2}(n+1)\right] = \frac{n}{2}\left[2n^2+6n+4-3n-3\right]$

donc $S_2 = \frac{n}{6}\left[2n^2+3n+1\right] = \boxed{\frac{n}{6}[n+1][2n+1]}$

ⓒ $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $\underline{(k+1)^4-k^4} = k^4+4k^3+6k^2+4k+1-k^4 = 4k^3+6k^2+4k+1$

d'où $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left((k+1)^4-k^4\right) = 4\sum_{k=1}^{n} k^3 + 6\sum_{k=1}^{n} k^2 + 4\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1 = 4S_3+6S_2+4S_1+n$

or $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (k+1)^4-k^4 = (n+1)^4 - 1^4 = n^4+4n^3+6n^2+4n = n(n^3+4n^2+6n+4)$

donc $\underline{4S_3+6S_2+4S_1+n = n(n^3+4n^2+6n+4)}$ -----

ⓓ $\underline{\text{Généralisation}}$ Soit $p \in \mathbb{N}^*$

$\forall k \in [\![1,n]\!]$, $\displaystyle(k+1)^{p+1} - k^{p+1} = \sum_{i=0}^{p+1}\binom{p+1}{i} k^i 1^{p+1-i} - k^{p+1}$

$\displaystyle= \sum_{i=0}^{p+1}\binom{p+1}{i} k^i - \sum_{i=p+1}^{p+1} k^i = \sum_{i=0}^{p}\binom{p+1}{i} k^i$

d'où $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left((k+1)^{p+1}-k^{p+1}\right) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=0}^{p}\binom{p+1}{i} k^i \longrightarrow$ linéarité de la somme

$\displaystyle= \sum_{i=0}^{p}\sum_{k=1}^{n}\binom{p+1}{i} k^i = \sum_{i=0}^{p}\binom{p+1}{i}\left(\sum_{k=1}^{n} k^i\right)$

$\displaystyle= \sum_{i=0}^{p}\binom{p+1}{i} S_i = \sum_{i=0}^{p-1}\binom{p+1}{i} S_i + \sum_{i=p}^{p}\binom{p+1}{i} S_i$

$\displaystyle= \sum_{i=0}^{p-1}\binom{p+1}{i} S_i + \binom{p+1}{p} S_p$

$\displaystyle= \sum_{i=0}^{p-1}\binom{p+1}{i} S_i + (p+1) S_p$

or $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left((k+1)^{p+1}-k^{p+1}\right) = (n+1)^{p+1} - 1^{p+1} = (n+1)^{p+1} - 1$

(somme télescopique)

donc $\displaystyle(n+1)^{p+1} - 1 = \sum_{i=0}^{p-1}\binom{p+1}{i} S_i + (p+1) S_p$

soit $\displaystyle(p+1)S_p = (n+1)^{p+1} - 1 - \sum_{i=0}^{p-1}\binom{p+1}{i} S_i$

càd $\displaystyle\boxed{S_p = \frac{1}{p+1}\left[(n+1)^{p+1} - 1 - \sum_{i=0}^{p-1}\binom{p+1}{i} S_i\right]}$