TD 2 cor MPS I

Exercice 1

1)

P	Q	P et Q	non(P et Q)
V	V	V	F
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	V

2) $\text{non}(P) \equiv (P \uparrow P)$ car $P \uparrow P = \text{non}(P \text{ et } P)$
$= \text{non}(P)$

$P \text{ et } Q \equiv \text{non}(P \uparrow Q)$ car $\text{non}(\text{non}(P \text{ et } Q))$
$\equiv P \text{ et } Q$
$\equiv (P \uparrow Q) \uparrow (P \uparrow Q)$

$P \text{ ou } Q \equiv (\text{non}P \uparrow \text{non}Q) \equiv (P\uparrow P)\uparrow(Q \uparrow Q)$

car $(\text{non}P \uparrow \text{non}Q) \equiv \text{non}(\text{non}P \text{ et } \text{non}Q)$
$\equiv \text{non}(\text{non}P) \text{ ou } \text{non}(\text{non}Q)$
$\equiv P \text{ ou } Q.$

Exercice 2 Soit $n \geq 1$. On définit $\mathcal{P}(n)$: " $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$ "

Montrons par récurrence simple que $\forall n \geq 1$ $\mathcal{P}(n)$ est vraie

* initialisation : si $n=1$ alors $\displaystyle\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{1\times(1+1)\times(1+2)} = \frac{1}{6}$

et $\dfrac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)} = \dfrac{1\times 4}{4\times 2\times 3} = \dfrac{1}{6}$ donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie

* hérédité : supposons qu'il existe un $n \geq 1$ tel que $\mathcal{P}(n)$ est vraie

alors $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$

or $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+1+1)(n+1+2)}$

par la relation de Chasles

$$\overset{HR}{=} \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}$$

$$= \frac{n(n+3)(n+3)+4}{4(n+1)(n+2)(n+3)}$$

$$= \frac{4+n(n^2+6n+9)}{4(n+1)(n+2)(n+3)}$$

$$= \frac{4+n^3+6n^2+9n}{4(n+1)(n+2)(n+3)}$$

or $(n+1)(n+4)(n+1) = (n+4)(n+1)^2 = (n+4)(n^2+2n+1)$
$= n^3+2n^2+n+4n^2+8n+4$
$= n^3+6n^2+9n+4$

Donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{(n+1)(n+4)\cancel{(n+1)}}{4\cancel{(n+1)}(n+2)(n+3)} = \frac{(n+1)(n+4)}{4(n+2)(n+3)}$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie

* conclusion $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(n)$ vraie

Exercice 3 : Soit $M \in \mathbb{R}^+$

non $(\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leq M) \equiv (\exists x \in \mathbb{R}, f(x) > M.)$

On cherche donc $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = x^2 > M$.

Il suffit de prendre $x = \sqrt{M}+1$. Alors $f(x) = (\sqrt{M}+1)^2 = \sqrt{M}^2 + 2\sqrt{M} + 1$
$= M + 2\sqrt{M} + 1 > M$

Exercice 4 : • Montrons que n pair $\Rightarrow$ n^2 pair

Soit n un nombre pair. Alors $\exists k \in \mathbb{N}$ tq $n = 2k$

et $n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2 \times \underbrace{2k^2}_{K}$ donc $n^2 = 2K$ avec $K = 2k^2 \in \mathbb{N}$

Ainsi $\exists K \in \mathbb{N}$ tq $n^2 = 2K$ et n^2 est pair.

• Montrons que n^2 pair $\Rightarrow$ n pair en raisonnant par contraposée

càd mq n non pair $\Rightarrow$ n^2 non pair, càd

n impair $\Rightarrow$ n^2 impair.

Soit n un nombre impair. Alors $\exists k \in \mathbb{N}$ tq $n = 2k+1$

et $n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(\underbrace{2k^2+2k}_{K}) + 1$

Ainsi $\exists K \in \mathbb{N}$ tq $n^2 = 2K+1$ et n^2 est impair

Exercice 5 : Supposons que $\sqrt{2}$ est un nombre rationnel

Alors il existe $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ tel que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ et $\frac{p}{q}$ est une fraction irréductible.

Alors $\sqrt{2}^2 = \left(\frac{p}{q}\right)^2$ donc $2q^2 = p^2$ donc p^2 est pair

donc d'après l'ex 4, p est pair et il existe $k \in \mathbb{N}$ tq

$p = 2k$. Ainsi $2q^2 = (2k)^2 = 4k^2$ donc $q^2 = 2k^2$

donc q^2 est pair et il existe $k' \in \mathbb{N}$ tq $q = 2k'$

Ainsi $\frac{p}{q}$ n'est pas une fraction irréductible $\Rightarrow$ contradiction

Donc $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel

Exercice 6 Soit $\mathcal{P}(n) : u_n = 2^n + 3^n$. Mq $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ vraie par réc double

* initialisation : si $n = 0$ alors $u_0 = 2 = 2^0 + 3^0$ donc $\mathcal{P}(0)$ vraie
si $n = 1$ alors $u_1 = 5 = 2^1 + 3^1$ donc $\mathcal{P}(1)$ vraie

* hérédité : supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tq $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ vraies

$u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n = 5(2^{n+1} + 3^{n+1}) - 6(2^n + 3^n)$ par HR

$= 2^n(10 - 6) + 3^n(15 - 6) = 2^n \times 4 + 3^n \times 9$

$= 2^n \times 2^2 + 3^n \times 3^2 = 2^{n+2} + 3^{n+2}$ donc $\mathcal{P}(n+2)$ vraie

* concl : $\forall n \in \mathbb{N}$ $\mathcal{P}(n)$ vraie

Exercice 8 : " Que répondrait ton collègue si je lui demandais quel couloir mène à la liberté ? "

En effet le gardien qui dit la vérité sait que son collègue ment et indique donc le mauvais couloir
et le gardien qui ment va indiquer l'autre couloir que celui que donnerait son collègue, c'est à dire qu'il va indiquer le mauvais couloir également. Il faudra emprunter le couloir non indiqué.

ex 7 Soit $\mathcal{P}(n)$: $u_n \leq 2^n$

Mq $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ vraie par récurrence forte

- <u>Initialisation</u> si $n=0$ alors $u_0 = 1$ et $2^0 = 1$
  donc $\mathcal{P}(0)$ vraie
- <u>hérédité</u> : supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tq $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $\mathcal{P}(k)$ vraie et mq $\mathcal{P}(n+1)$ vraie.

$u_{n+1} = u_0 + u_1 + \dots + u_n$ or $\mathcal{P}(0)$ vraie donc $u_0 \leq 2^0$
$\leq 2^0 + 2^1 + \dots + 2^n$ $\mathcal{P}(1)$ vraie donc $u_1 \leq 2^1$
$\vdots$
$\mathcal{P}(n)$ vraie donc $u_n \leq 2^n$

or $2^0 + 2^1 + \dots + 2^n = \sum_{k=0}^{n} 2^k = \frac{1-2^{n+1}}{1-2}$ ($\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ lorsque $q \neq 1$)

donc $u_{n+1} \leq \frac{1-2^{n+1}}{1-2} = \frac{1-2^{n+1}}{-1} = 2^{n+1} - 1$

donc $u_{n+1} \leq 2^{n+1} - 1$ or $2^{n+1} - 1 \leq 2^{n+1}$

donc $u_{n+1} \leq 2^{n+1}$ $\Rightarrow$ $\mathcal{P}(n+1)$ vraie

- <u>concl</u> : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ vraie.

ex 9 TD2

① $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \leq x$ est fausse par ex si $x=2$ négation $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 > x$

② $x \in [1,+\infty[\Rightarrow x^2 \geq x$ vraie car $x^2 - x = x(x-1) \geq 0$ si $x \in [1,+\infty[$

négation : $x \in [1,+\infty[$ et $x^2 < x$

contraposée : $x^2 < x \Rightarrow x \in]-\infty, 1[$ vraie

réciproque : $x^2 \geq x \Rightarrow x \in [1,+\infty[$ fausse par ex $x=-2$

③ $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 \geq x$ vrai par ex $x=2$ négation $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 < x$

④ $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, x=y \Leftrightarrow x^2=y^2$ faux. $x=2$ et $x=-2$

$\exists (x,y) \in \mathbb{R}^2, (x \neq y$ et $x^2 = y^2)$ ou $(x=y$ et $x^2 \neq y^2)$: négation

(contraposée : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, x \neq y \Leftrightarrow x^2 \neq y^2$; rec : elle-même)

⑤ $\forall x \in \mathbb{N}\ \exists y \in \mathbb{N}, y > x^2$ vrai : $y = x^2+1$ convient

$\exists x \in \mathbb{N}\ \forall y \in \mathbb{N}\ y \leq x^2$ Faux car $\mathbb{N}$ n'est pas borné

⑥ Si $2=-2$ alors $(-2)^2=4$ vrai

négation : $2=-2$ et $(-2)^2 \neq 4$

⑦ $\forall (a,b,c) \in \mathbb{R}^3, (a \neq b$ et $b \neq c) \Rightarrow a \neq c$ Faux prendre $a=c=2$ et $b=1$

$\exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, $a \neq b$ et $b \neq c$ et $a=c$

réciproque : $\forall (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ $a \neq c \Rightarrow (a \neq b$ et $b \neq c)$ faux

Contraposée : $\forall (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ $a=c \Rightarrow (a=b$ ou $b=c)$ fausse