Exercice 1

CORRIGE DU DS2 - MPSI - 24/25

1. (a) $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geq 3$
   (b) $\exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 \Rightarrow u_n = 0$
   (c) $\exists x \in A,\ x \in B$
   (d) $\forall x \in \mathbb{R},\ x \geq 2 \Rightarrow x \geq 0$.

2. (a) f s'annule une unique fois sur $\mathbb{R}$
   (b) f est la fonction nulle sur $\mathbb{R}$
   (c) le carré de tout entier pair est pair
   (d) f est décroissante sur $\mathbb{R}$

3. (a) Faux : $2^4 - 1 = 15$ n'est pas premier
   (b) Vrai : Soit $x \in \mathbb{R}$. $x \geq 3 \Rightarrow x^2 \geq 9 \Rightarrow x^2 \geq 8$.
   (c) Faux : $-2 < 3$ et $\frac{1}{-2} < \frac{1}{3}$

4. (a) réciproque : $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^*)^2,\ \frac{1}{x} > \frac{1}{y} \Rightarrow x < y$

   contraposée : $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^*)^2,\ \frac{1}{x} \leq \frac{1}{y} \Rightarrow x \geq y$

4. (b) $\exists (x,y) \in \mathbb{R}^2$ tq $x < y$ et $f(x) < f(y)$

5. (a) Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose $\mathcal{P}(n)$: "$u_n \leq 2^n$"

   Montrons que $\mathcal{P}(n)$ vraie pour tout n par <u>récurrence forte</u>

   <u>initialisation</u> : si $n = 0$ alors $u_0 = 1$ et $2^0 = 1$ donc $u_0 \leq 2^0$ et $\mathcal{P}(0)$ vraie

   <u>hérédité</u> : supposons que pour un n fixé ($n \in \mathbb{N}$), $\mathcal{P}(0), \mathcal{P}(1), \dots, \mathcal{P}(n)$ sont vraies (càd $\forall k \in [\![0,n]\!],\ \mathcal{P}(k)$ vraie) et mq $\mathcal{P}(n+1)$ vraie.

   $u_{n+1} = u_0 + u_1 + \dots + u_n$. or $\forall k \in [\![0,n]\!],\ u_k \leq 2^k$ (HR

   donc $\sum_{k=0}^{n} u_k \leq \sum_{k=0}^{n} 2^k = \frac{2^0 - 2^{n+1}}{1-2} = \frac{1-2^{n+1}}{-1} = 2^{n+1} - 1 \leq 2^{n+1}$

   donc $u_{n+1} \leq 2^{n+1}$ et $\mathcal{P}(n+1)$ vraie

   <u>Conclusion</u> $\forall n \in \mathbb{N}$ $\mathcal{P}(n)$ vraie

5. (b) <u>Raisonnons par l'absurde</u> en supposant que : $\exists x \in \mathbb{Q}$ tq $x + \sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ alors $x + \sqrt{2} - x$ est la différence de deux rationnels : c'est un rationnel. Or $x + \sqrt{2} - x = \sqrt{2}$ donc $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ absurde.

   Concl : non($\exists x \in \mathbb{Q},\ x + \sqrt{2} \in \mathbb{Q}$) vraie donc <u>$\forall x \in \mathbb{Q},\ x + \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$</u>

5. (c) Soit $x \in \mathbb{R}$.

   - si $x - 1 > 0$ alors $|x-1| \leq x^2 - x + 1$ ssi $x - 1 \leq x^2 - x + 1$
     ssi $0 \leq x^2 - 2x + 2$

   or $x^2 - 2x + 2 = (x-1)^2 + 1$ donc $x^2 - 2x + 2 \geq 0$ est une proposition vraie. Par remontée d'équivalence, $|x-1| \leq x^2 - x + 1$ est vraie également

• si $x-1 \leq 0$ alors $|x-1| \leq x^2-x+1$ ssi $1-x \leq x^2-x+1$
ssi $0 \leq x^2$, ce qui est vrai
donc $|x-1| \leq x^2-x+1$ également par remontée d'équivalence.

Dans tous les cas on a donc $\underline{|x-1| \leq x^2-x+1}$.
On a raisonné ici par <u>disjonction de cas</u>

⑤ (d) Soit $a \in \mathbb{R}$
On raisonne par <u>contraposée</u> en montrant que :
$a \neq 0 \Rightarrow \text{non}\,(\forall \varepsilon > 0,\ |a| \leq \varepsilon)$.

$\text{non}\,(\forall \varepsilon > 0,\ |a| \leq \varepsilon) \equiv \exists \varepsilon > 0,\ |a| > \varepsilon$.

Il s'agit donc, a étant fixé non nul, de trouver un réel ε tq $\varepsilon > 0$ et $|a| > \varepsilon$.

Il suffit de prendre par exemple $\varepsilon = \frac{|a|}{2}$.
En effet, $\frac{|a|}{2} > 0$ et $|a| > \frac{|a|}{2}$ puisque $a \neq 0$.

On a prouvé la contraposée
donc $\underline{(\forall \varepsilon > 0,\ |a| \leq \varepsilon) \Rightarrow a = 0}$.

Exercice 2

Partie 1 : $a = e^{\frac{2i\pi}{7}}$

① $|a| = 1$ car a est un unimodulaire

$a^{-1} = \frac{1}{e^{\frac{2i\pi}{7}}} = e^{-\frac{2i\pi}{7}} = \frac{1}{a} = \bar{a}$

$a^7 = \left(e^{\frac{2i\pi}{7}}\right)^7 \underset{\text{formule de Moivre}}{=} e^{\frac{2i\pi \times 7}{7}} = e^{2i\pi} = 1$

② ⓐ $S+T = a+a^2+a^4+a^3+a^5+a^6 = a+a^2+a^3+a^4+a^5+a^6$ car l'addition est commutative et $a \neq 1$

donc $S+T = \sum_{k=1}^{6} a^k \underset{\sum q^k}{=} \frac{a-a^7}{1-a} = \frac{a-1}{1-a} = -\frac{1-a}{1-a} = \boxed{-1}$.

ⓑ $S^2 = (a+a^2+a^4)^2$

$= a^2+2a^3+2a^5+a^4+2a^6+a^8$ or $a^7=1$ donc $a^8=a$

$= a+a^2+a^4+2(a^3+a^5+a^6) = \boxed{S+2T}$

ⓒ $S^2+S+2 = S+2T+S+2 = 2(S+T)+2 \underset{q\,2a}{=} 2\times(-1)+2 = -2+2 = \boxed{0}$

ⓓ $\mathrm{Im}(S) = \mathrm{Im}(a)+\mathrm{Im}(a^2)+\mathrm{Im}(a^4)$ car Im est une application linéaire

$= \sin\frac{2\pi}{7} + \sin\frac{4\pi}{7} + \sin\frac{8\pi}{7}$ puisque $a^2 = e^{\frac{4i\pi}{7}}$ et $a^4 = e^{\frac{8i\pi}{7}}$

d'après la formule de Moivre

De plus $\sin\frac{8\pi}{7} = \sin\left(\pi+\frac{\pi}{7}\right) = -\sin\frac{\pi}{7}$

Donc $\mathrm{Im}(S) = \sin\frac{2\pi}{7} - \sin\frac{\pi}{7} + \sin\frac{4\pi}{7}$

or sin stt croissante sur $[0,\frac{\pi}{2}]$ et $0 \leq \frac{\pi}{7} < \frac{2\pi}{7} \leq \frac{\pi}{2}$

donc $\sin\frac{\pi}{7} < \sin\frac{2\pi}{7}$ et $\sin\frac{2\pi}{7} - \sin\frac{\pi}{7} > 0$.

De plus $\frac{4\pi}{7} \in]0,\pi[$ donc $\sin\frac{4\pi}{7} > 0$.

Ainsi $\mathrm{Im}(S) = \left(\sin\frac{2\pi}{7} - \sin\frac{\pi}{7}\right) + \sin\frac{4\pi}{7} \boxed{>0}$.

Par ailleurs les solutions de l'équation $X^2+X+2=0$ sont $\frac{-1\pm\sqrt{7}i}{2}$ car $\Delta = 1^2-4\times2 = -7 = (\sqrt{7}i)^2$

et $\mathrm{Im}(S)>0$ donc $\boxed{S = -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{7}}{2}i}$

Ainsi $T \underset{q\,2a}{=} -1-S = -1+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{7}}{2}i = \boxed{-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{7}}{2}i = T}$

③ ⓐ Soit $n \in \mathbb{Z}$. $\overline{(a+1)^n} = \overline{(a+1)}^n = (\bar{a}+1)^n \underset{q\,1}{=} \left(\frac{1}{a}+1\right)^n = \left(\frac{a+1}{a}\right)^n$

③ ⓑ Soit $n \in \mathbb{Z}$.

$(a+1)^n \in \mathbb{R}$ ssi $\overline{(a+1)^n} = (a+1)^n$ ssi $\left(\frac{a+1}{a}\right)^n = (a+1)^n$ ssi $\frac{(a+1)^n}{a^n} = (a+1)^n$

ssi $a^n = 1$ car $(a+1)^n \neq 0$

ssi $e^{\frac{2i\pi n}{7}}=1$ ssi $\frac{2\pi n}{7}\equiv 0\,[2\pi]$ ssi $2\pi n\equiv 0\,[14\pi]$

$\boxed{(a+i)^n \in \mathbb{R} \quad \text{ssi} \quad n\equiv 0\,[7]}$

Partie 2

① $AB=|z_B-z_A|=|2i-1|=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$
$BC=|z_C-z_B|=|2-i|=\sqrt{2^2+(-1)^2}=\sqrt{5}$ } donc ABC isocèle en B

② ⓐ si $z=1$ alors $z'=\frac{1-1}{1-2i}=0$ donc $g(A)=O$ où O est d'affixe 0

si $z=2+i$ alors $z'=\frac{2+i-1}{2+i-2i}=\frac{1+i}{2-i}=\frac{(1+i)(2+i)}{(2-i)(2+i)}=\frac{2+3i+i^2}{2^2+1^2}$

$z'=\frac{1+3i}{5}$

Soit $D\left(\frac{1+3i}{5}\right)$. On a : $g(C)=D$

② ⓑ Soit $z\in\mathbb{C}\setminus\{2i\}$ et $M(z)$

$|z'|=1$ ssi $\left|\frac{z-1}{z-2i}\right|=1$ ssi $|z-1|=|z-2i|$ ssi $AM=BM$

ssi M appartient à la médiatrice de [AB].

E_1 est donc la médiatrice de [AB]

② ⓒ Soit $z\in\mathbb{C}\setminus\{2i\}$. On pose $z=x+iy$ avec $(x,y)\in\mathbb{R}^2$

$z'=\frac{z-1}{z-2i}=\frac{x+iy-1}{x+iy-2i}=\frac{(x-1)+iy}{x+i(y-2)}=\frac{((x-1)+iy)(x-i(y-2))}{(x+i(y-2))(x-i(y-2))}$

$=\frac{(x-1)x-i(x-1)(y-2)+ixy+y(y-2)}{x^2+(y-2)^2}=\boxed{\frac{x^2-x+y^2-2y}{x^2+(y-2)^2}+i\frac{xy-(x-1)(y-2)}{x^2+(y-2)^2}}$

$z'\in i\mathbb{R}$ ssi $Re(z')=0$ ssi $\frac{x^2-x+y^2-2y}{x^2+(y-2)^2}=0$ ssi $x^2-x+y^2-2y=0$

ssi $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}+(y-1)^2-1=0$ ssi $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+(y-1)^2=\frac{5}{4}$

on reconnait une équation cartésienne du cercle

de centre $E\left(\frac{1}{2}+i\right)$ et de rayon $\sqrt{\frac{5}{4}}=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{4}}=\frac{\sqrt{5}}{2}$.

E_2 est donc le cercle de centre E et de rayon $\frac{\sqrt{5}}{2}$ privé de B,

car $\left(x_B-\frac{1}{2}\right)^2+(y_B-1)^2=\left(-\frac{1}{2}\right)^2+(-1)^2=\frac{1}{4}+1=\frac{5}{4}$. En effet

$x_B=0$ et $y_B=2$.

Corrigé du DS2 MPSI

Exercice 3

Partie 1 :

① Soit $t \in]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}[\setminus \{0\}$, $\tan 2t = \dfrac{2\tan t}{1-\tan^2 t}$

donc $\dfrac{1}{\tan t} - \dfrac{2}{\tan(2t)} = \dfrac{2}{2\tan t} - \dfrac{2(1-\tan^2 t)}{2\tan t} = \dfrac{\cancel{2}-\cancel{2}+2\tan^2 t}{2\tan t} = \boxed{\tan t.}$

② Soit $x \in]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}[\setminus \{0\}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![1, n]\!]$.

En remplaçant t par $\frac{x}{2^k}$, l'égalité de la question précédente devient :

$\tan\left(\frac{x}{2^k}\right) = \dfrac{1}{\tan\left(\frac{x}{2^k}\right)} - \dfrac{2}{\tan\left(\frac{2x}{2^k}\right)}$ or $\dfrac{2}{2^k} = \dfrac{1}{2^{k-1}}$ et en multipliant par $\frac{1}{2^k}$:

$\dfrac{1}{2^k}\tan\left(\frac{x}{2^k}\right) = \dfrac{1}{2^k\tan\left(\frac{x}{2^k}\right)} - \dfrac{2}{2^k} \times \dfrac{1}{\tan\left(\frac{x}{2^{k-1}}\right)} = \dfrac{1}{2^k\tan\left(\frac{x}{2^k}\right)} - \dfrac{1}{2^{k-1}\tan\left(\frac{x}{2^{k-1}}\right)}$

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}\tan\left(\frac{x}{2^k}\right)$ est de la forme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k - a_{k-1}$. C'est une <u>somme télescopique</u>, avec $a_k = \dfrac{1}{2^k\tan\left(\frac{x}{2^k}\right)}$. La valeur de cette somme est :

$a_n - a_0$, soit $\dfrac{1}{2^n\tan\left(\frac{x}{2^n}\right)} - \dfrac{1}{2^0\tan\left(\frac{x}{2^0}\right)} = \boxed{\dfrac{1}{2^n\tan\left(\frac{x}{2^n}\right)} - \dfrac{1}{\tan(x)}}$

Partie 2

① ⓐ G est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que somme et composée de fcts dérivables sur $\mathbb{R}$: u et F.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $G'(x) = F'(x) + u'(x)F'(u(x)) = F'(x) - F'(-x) = \dfrac{1}{1+x^2} - \dfrac{1}{1+(-x)^2}$

$= \dfrac{1}{1+x^2} - \dfrac{1}{1+x^2} = \boxed{0.}$

ⓑ $G(0) = F(0) + F(-0) = F(0) + F(0) = 0$ d'après l'énoncé.

Comme $\forall x \in \mathbb{R}$, $G'(x) = 0$, G est constante sur $\mathbb{R}$

Comme $G(0) = 0$, G est la fonction nulle sur $\mathbb{R}$.

Donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $F(x) + F(-x) = 0$ donc <u>$\forall x \in \mathbb{R}$ $F(-x) = -F(x)$</u>

<u>et F est impaire</u>

② ⓐ H est dérivable sur I en tant que somme et composée de fcts dérivables sur I : v et F (en effet F dérivable sur $\mathbb{R}$ donc aussi sur $\mathbb{R}_+^*$)

$\forall x \in I$, $H'(x) = F'(x) + v'(x)F'(v(x))$

$= F'(x) - \dfrac{1}{x^2}F'\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{1}{1+x^2} - \dfrac{1}{x^2}\,\dfrac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}$

$= \dfrac{1}{1+x^2} - \dfrac{1}{x^2+1} = \boxed{0}$

ⓑ H est donc constante sur $\mathbb{R}$. De plus $H(1) = F(1) + F\left(\frac{1}{1}\right) = 2F(1)$

donc <u>$\forall x \in I$, $H(x) = 2F(1)$</u>

ⓒ Comme F est dérivable sur $\mathbb{R}$, F est dérivable en 0 donc continue en 0 donc $\lim\limits_{x\to+\infty} F\left(\frac{1}{x}\right) = \lim\limits_{y\to 0} F(y) = F(0) = 0$.

En passant à la limite dans l'égalité : $\forall x\in\mathbb{R}$, $2F(1) = F(x) + F\left(\frac{1}{x}\right)$ on obtient donc $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$ existe et sa valeur est $2F(1)$.

ⓓ $\mathcal{C}$ admet en $+\infty$ une asymptote horizontale d'équation $y = 2F(1)$.

③ⓐ T est dérivable sur J en tant que somme et composée de fcts dérivables : tan qui est dérivable sur J et F qui est dérivable sur $\mathbb{R}$

$\forall x\in J$, $T'(x) = \tan'(x) \times F'(\tan x) - 1$

$= (1+\tan^2 x) \times \frac{1}{1+\tan^2 x} - 1 = 1 - 1 = \boxed{0}$

③ⓑ T est donc constante sur J. De plus $T(0) = F(\tan 0) - 0 = F(0) = 0$

Donc T est la fonction nulle sur $\mathbb{R}$.

③ⓒ $\forall x\in J$ on a : $0 = F(\tan(x)) - x$, soit $\forall x\in J$, $F(\tan(x)) = x$

en particulier, si $x = \frac{\pi}{4}$, $F\left(\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \frac{\pi}{4}$ donc $\boxed{F(1) = \frac{\pi}{4}}$

④ $\forall x\in\mathbb{R}$, $F'(x) = \frac{1}{1+x^2} > 0$ donc F est croissante sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$F'(x)$		$+$	
$F(x)$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$2F(1) = 2\times\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$

$-\frac{\pi}{2} \leftarrow$ F est impaire

⑤ Une équation de la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse x_0 est :

$y = F'(x_0)(x-x_0) + F(x_0)$.

Donc au point d'abscisse 0 : $y = F'(0)(x-0) + F(0) = x$

1 : $y = F'(1)(x-1) + F(1) = \frac{1}{2}(x-1) + \frac{\pi}{4}$

-1 : $y = F'(-1)(x+1) + F(-1) = \frac{1}{2}(x+1) - \frac{\pi}{4}$

car F est impaire donc $F(-1) = -F(1)$.