Les documents, calculatrices et téléphones portables sont interdits. La clarté et la précision de la rédaction seront prises en compte dans la notation. Les trois exercices sont indépendants et peuvent ne pas être traités dans l'ordre. Il y a matière à valoriser votre travail dans ce devoir, soyez confiants.

Exercice 1 sur environ 20 points

1. Ecrire à l'aide de quantificateurs les propositions suivantes :
   (a) la fonction f, définie sur $\mathbb{R}$, admet un minimum qui vaut 3,
   (b) la suite u est nulle à partir d'un certain rang,
   (c) les ensembles A et B ne sont pas disjoints,
   (d) une condition nécessaire pour qu'un réel soit supérieur à 2 est que ce réel soit positif.
2. Convertir en langage usuel :
   (a) $\exists! x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0$,
   (b) $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0$,
   (c) $\forall n \in \mathbb{N},\ (\exists p \in \mathbb{N},\ n = 2p) \Rightarrow \big(\exists q \in \mathbb{N},\ n^2 = 2q\big)$.
   (d) $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x < y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$.
3. Justifier si les propositions suivantes sont vraies ou fausses :
   (a) tout nombre entier de la forme $2^n - 1$, où $n \in \mathbb{N}^*$, est premier,
   (b) une condition suffisante pour que le carré d'un nombre réel x soit supérieur à 8 est que ce nombre x soit supérieur à 3,
   (c) pour tout couple (x, y) de réels non nuls, si $x < y$ alors $\dfrac{1}{x} > \dfrac{1}{y}$.
4. (a) Enoncer la réciproque et la contraposée de la proposition 3c.
   (b) Enoncer la négation de la propositon :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x < y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$$

5. Dans cette question, on utilisera pour chaque item un des types de raisonnement suivants : raisonnement par disjonction de cas, raisonnement par récurrence, raisonnement par contraposée et raisonnement par l'absurde.
   (a) Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$. Montrer que pour tout entier n, $u_n \leq 2^n$
   (b) Sachant que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, montrer que $\forall x \in \mathbb{Q},\ x + \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.
   (c) Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|x - 1| \leq x^2 - x + 1$.
   (d) Montrer que $(\forall \epsilon > 0,\ |a| \leq \epsilon) \Rightarrow a = 0$.

Exercice 2 sur environ 20 points : nombres complexes

Partie 1 : un unimodulaire

Dans cette partie on pose $a = e^{\frac{2i\pi}{7}}$, $S = a + a^2 + a^4$ et $T = a^3 + a^5 + a^6$.
On rappelle la formule de Moivre que l'on pourra utiliser dans cette partie :
pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$.

1. Donner les valeurs de $|a|$, a^{-1} et a^7.
2. (a) Calculer $S + T$.
   (b) Exprimer S^2 en fonction de S et de T.
   (c) En déduire que $S^2 + S + 2 = 0$.
   (d) Montrer finalement que la partie imaginaire de S est strictement positive puis calculer S et T.
3. (a) Soit $n \in \mathbb{Z}$. Montrer que $\overline{(a+1)^n} = \left(\dfrac{a+1}{a}\right)^n$.
   (b) Déterminer pour quelles valeurs de n, pour $n \in \mathbb{Z}$, $(a+1)^n$ est réel. On utilisera la question précédente.

Partie 2 : une application du plan complexe

Dans le plan complexe P, muni d'un repère orthonormal direct $(0, \vec{i}, \vec{j})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = 1$, $z_B = 2i$ et $z_C = 2 + i$.

1. Quelle est la nature du triangle ABC ? On justifiera la réponse.
2. On désigne par g l'application qui, à tout point M du plan P, d'affixe z et distinct de B, associe le point M' d'affixe z' définie par :
$$z' = \frac{z-1}{z-2i}$$
   (a) Déterminer les images de A et de C par g.
   (b) Déterminer géométriquement l'ensemble E_1 des points M d'affixe z tels que $|z'| = 1$.
   (c) Déterminer la forme algébrique de z' puis en déduire l'ensemble E_2 des points M d'affixe z tels que z' est imaginaire pur.

Exercice 3 sur environ 20 points : autour de la fonction tangente

Partie 1 : calcul d'une somme

1. Montrer que pour $t \in \left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right[\setminus \{0\}$:

$$\tan(t) = \frac{1}{\tan t} - \frac{2}{\tan(2t)}.$$

2. En déduire que pour $x \in \left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right[\setminus \{0\}$ et $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} \tan\left(\frac{x}{2^k}\right) = \frac{1}{2^n \tan\left(\frac{x}{2^n}\right)} - \frac{1}{\tan(x)}.$$

Partie 2 : étude d'une fonction

Dans cette partie on suppose que F est une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $F(0) = 0$ et pour tout réel x, $F'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$. On admet que cette fonction existe et on ne cherchera pas à donner une expression de $F(x)$. On note par ailleurs $\mathcal{C}$ la courbe représentative de F dans un repère orthonormal.

1. Soit G la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ G(x) = F(x) + F(-x)$$

   (a) Montrer que G est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $G'(x) = 0$ pour tout réel x. Ce calcul est possible puisque l'on connaît l'expression de F', même si l'on ne connaît pas celle de F. On pourra introduire la fonction $u\ :\ x \mapsto -x$ et écrire $F(-x)$ sous la forme $F \circ u(x)$.

   (b) Calculer $G(0)$ et en déduire que F est une fonction impaire.

2. Soit H la fonction définie sur $I = \mathbb{R}^{+*}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*},\ H(x) = F(x) + F\left(\frac{1}{x}\right)$$

   (a) Justifier que H est dérivable sur I et calculer $H'(x)$ pour tout réel x appartenant à I. On pourra introduire la fonction $v\ :\ x \mapsto \dfrac{1}{x}$ et écrire $F\left(\dfrac{1}{x}\right)$ sous la forme $F \circ v(x)$.

   (b) Démontrer que pour tout x dans I, $H(x) = 2F(1)$.

   (c) En déduire que la limite de la fonction F en $+\infty$ est $2F(1)$.

   (d) Que peut-on en déduire pour la courbe $\mathcal{C}$?

3. Soit T la fonction définie sur $J = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ par :

$$\forall x \in J,\ T(x) = F(\tan(x)) - x$$

   (a) Justifier que T est dérivable sur J et calculer $T'(x)$ pour tout réel x appartenant à J. On remarquera pour cela que $F(\tan(x)) = F \circ \tan(x)$.

   (b) Que peut-on en déduire pour la fonction T ?

   (c) Calculer $F(1)$.

4. Dresser le tableau de variations de F sur $\mathbb{R}$.

5. A traiter si vous avez fini le reste : préciser les équations des tangentes aux points d'abscisses 0, 1 et -1.