Chapitre 2 : Rudiments de logique - Ensembles

1 Les propositions mathématiques

Faire des mathématiques, c'est avant tout faire des raisonnements, c'est-à-dire partir d'une hypothèse et par des "moyens légaux", parvenir à une conclusion. Ces moyens légaux sont les règles de logique. On peut classer les expressions mathématiques en deux catégories :

— les termes qui désignent un objet mathématique, fixe (constantes) ou variable ($x + 5$),

— les propositions (ou propriétés, ou encore énoncés) qui expriment un fait mathématique fixe ou variable, réalisé ou non ($2 + 2 = 4$, $2x + y = 8$, $1 + 1 = 0$).

Une proposition est soit vraie, soit fausse. On dit qu'elle peut prendre deux valeurs de vérité : V ou F (1 ou 0). Les propositions seront désignées par des lettres (P, Q, ...). Dire "on a P" revient à dire que P est vraie et dire "on n'a pas P" revient à dire que P est fausse.
Certaines propositions contiennent des variables. Elles seront vraies ou fausses dès que les variables seront spécifiées. Par exemple, si $P(x)$ est la proposition $x^2 + 1 > 2$, $P(2)$ V et $P(0)$ F. On appelle ces énoncés des prédicats.

Deux propositions sont dites synonymes (ou logiquement équivalentes) si elles ont en même temps les mêmes valeurs de vérité, ce que l'on note $\equiv$. Par exemple $x + 1 = 2$ et $x = 1$ sont synonymes, $1 + 1 = 2$ et $2 < 4$ aussi, mais $x + 1 = 2$ et $2 < 4$ ne le sont pas.
La démarche mathématique consiste à partir d'une première propriété baptisée hypothèse et en déduire la véracité d'une deuxième propriété (conclusion).
Une proposition démontrée s'appelle un théorème. Un lemme est un théorème qui est une étape dans la démonstration d'un théorème principal. Un corollaire est un théorème qui est une conséquence immédiate d'un théorème principal. Les premières hypothèses sont les axiomes, supposés vrais *a priori*. Les théorèmes démontrés peuvent servir de nouvelles hypothèses pour démontrer d'autres théorèmes. C'est ainsi que se construisent les connaissances mathématiques.

2 Les ensembles

2.1 Eléments, appartenance

La notion d'ensemble est suggérée intuitivement par celle de collection d'objets (nécessité de réunir des objets). On appelle élément d'un ensemble tout objet de cet ensemble. Soit le prédicat : "l'objet a est un élément de l'ensemble E".

— si il est vrai, on note $a \in E$ et on lit "a est élément de E" ou "a appartient à E".

— si il n'est pas vrai, on note $a \notin E$ et on lit "a n'est pas élément de E" ou "a n'appartient pas à E".

On écrit les éléments d'un ensemble entre deux accolades $\{\}$. Un ensemble est défini en extension si on énumère tous les éléments de cet ensemble.
► Exemples :

— $A = \{a, b, \cdots, z\}$. $c \in A$, $2 \notin A$.

— $B = \{F, V\}$, ensemble des booléens.

— Un ensemble constitué d'un unique élément a est appelé singleton et est noté $\{a\}$. $a \in \{a\}$.

Deux ensembles sont égaux s'ils ont les mêmes éléments. On note $E = F$ (et sinon $E \neq F$).
► Exemple : $\{a, b\} = \{b, a\}$, $\{a, b, a\} = \{a, b\}$.
On appelle ensemble vide et on note $\emptyset$ l'ensemble qui ne contient aucun élément.

2.2 Sous-ensemble, inclusion

Définition 1 (Sous-ensemble).

> *Un ensemble A est un sous-ensemble d'un ensemble E (on dit aussi que A est une partie de E) si tout élément de A est élément de E.*

Soit le prédicat : "A est un sous-ensemble de E".
- si il est vrai, on note $A \subset E$ et on lit "A est inclus dans E" ou "A est une partie de E" ou encore "A est contenu dans E".
- si il est faux, on note $A \not\subset E$ et on lit "A n'est pas inclus dans E" ou "A n'est pas une partie de E".

Remarque 1. *Distinction inclus - strictement inclus.*

Propriété 1 (Propriétés de l'inclusion).

> 1. *$\emptyset \subset E$ (l'ensemble vide est contenu dans tout ensemble)*
> 2. *$E \subset E$ (tout ensemble est une partie de lui-même)*
> 3. *si $F \subset E$ et $E \subset F$ alors $E = F$ (utile pour montrer l'égalité de deux ensembles)*
> 4. *si $E \subset F$ et $F \subset G$ alors $E \subset G$*

Une partie de E peut être définie par compréhension, en se donnant un prédicat P caractérisant les éléments de l'ensemble.
On note $E_P = \{x \in E \ ; \ P(x)\}$ et on lit "E_P est l'ensemble des éléments de E tels que $P(x)$". E est le référentiel, $P(x)$ une proposition et x, un élément de E, appartient à E_P si et seulement si $P(x)$ est vraie.
► Exemples :$\{n \in \mathbb{N} \ ; \ n$ est un multiple de $2\}$ est l'ensemble $\{2, 4, \cdots\}$.
$\{M \in P \ ; \ OM = R\}$ est le cercle de centre O et de rayon R.

Remarque 2. *Si $P(x) \equiv Q(x)$, alors $E_P = E_Q$*

2.3 Les quantificateurs

On s'intéresse ici à deux cas particuliers :
- $E_P = E$. On écrit "$\forall x \in E, \ P(x)$" et on lit "pour tout x appartenant à E, $P(x)$" ou encore "quelque soit x appartenant à E, $P(x)$".
  Les propositions $E_P = E$ et $\forall x \in E, \ P(x)$ sont synonymes. Le symbole $\forall$ est appelé quantificateur universel(A renversé et A pour All).
- $E_P \neq \emptyset$. On écrit "$\exists x \in E, \ P(x)$" et on lit "il existe un x appartenant à E tel que $P(x)$" ou encore "pour au moins un x de E, $P(x)$".
  Les propositions $E_P \neq \emptyset$ et $\exists x \in E, \ P(x)$ sont synonymes. Le symbole $\exists$ est appelé quantificateur existentiel(E renversé et E pour Exists).

► Exemples :
- f est périodique de période 2π lorsque $\forall x \in \mathcal{D}_f$, $x + 2\pi \in \mathcal{D}_f$ et $f(x + 2\pi) = f(x)$.
- $\exists x \in \mathbb{R}, \ 3x = 1$ se traduit par 3 a un inverse dans $\mathbb{R}$.
- "$\forall n \in \mathbb{N}, \ 2n$ est pair" et "$\exists x \in \mathbb{R}, \ 3x = 1$" sont des propositions vraies.
- Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Comment écrire avec les quantificateurs "f est paire" ?

Remarque 3.
- *$(\forall x \in E, \ P(x)) \equiv (\forall t \in E, \ P(t))$. La variable x est dite liée (ou muette). Son nom est sans importance. Une variable qui n'est pas liée est libre (ou parlante). De même dans $\int_0^y f(x)dx$, la variable x est muette alors que y est parlante puisque toute modification dans cette expression entraîne une modification de la valeur de l'expression.*
- *La proposition $P(x)$ peut elle-même contenir des quantificateurs : $\forall x \in E, \ \forall y \in E, \ P(x, y)$.*
- *Dans une proposition contenant plusieurs quantificateurs,*
  - *on peut intervertir deux quantificateurs universels qui se suivent :*
  $$(\forall x \in E, \ \forall y \in F, \ P(x, y)) \equiv (\forall y \in F, \ \forall x \in E, \ P(x, y))$$
  - *on peut intervertir deux quantificateurs existentiels qui se suivent :*
  $$(\exists x \in E, \ \exists y \in F, \ P(x, y)) \equiv (\exists y \in F, \ \exists x \in E, \ P(x, y))$$

- *on ne peut pas intervertir deux quantificateurs de nature différente :* $\forall x \in E,\ \exists y \in F,\ P(x,y)$ *et* $\exists y \in F,\ \forall x \in E,\ P(x,y)$ *ne sont pas en général synonymes.*

► Exemples :

- $\forall x \in \mathbb{N},\ \exists y \in \mathbb{N},\ x < y$ est vraie mais $\exists y \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{N},\ x < y$ est fausse : il n'existe pas d'entier naturel qui soit plus grand que tous les autres.
- $(\forall y \in \mathbb{N},\ xy = x) \equiv (x = 0)$ (ici y est liée, x est libre).
- $(\forall y \in \mathbb{N},\ xy = y) \equiv (x = 1)$.

Définition 2.

Soit P un prédicat sur un ensemble E. L'énoncé : "il existe un unique élément x de E tels que $P(x)$ soit vraie" se note : $\exists! x \in E,\ P(x)$.

► Exemple : Soient E et F deux ensembles et f une fonction définie de E vers F. f est dite bijective lorsque $\forall y \in F$, $\exists! x \in E$, $y = f(x)$.

2.4 Ensemble des parties

Définition 3.

Soit E un ensemble. On appelle ensemble des parties de E et on note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble dont les éléments sont les parties (ou sous-ensembles) de E.

► Exemple : si $E = \{a, b\}$, les sous-ensembles de E sont $\emptyset,\ \{a\},\ \{b\},\ \{a, b\}$ et donc $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$.

Remarque 4. — *Soient A et E deux ensembles.* $(A \in \mathcal{P}(E)) \equiv (A \subset E)$.

- *si A est une partie de E ($A \subset E$), alors $A \in \mathcal{P}(E)$: A est un élément de $\mathcal{P}(E)$.*
- *si a est un élément de E alors $\{a\}$ est un élément de $\mathcal{P}(E)$: $a \in E$, $\{a\} \subset E$ et $\{a\} \in \mathcal{P}(E)$.*
- $\emptyset \in \mathcal{P}(E)$ *et* $E \in \mathcal{P}(E)$.
- $\mathcal{P}(\emptyset)$ *contient un élément : l'ensemble vide.* $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$, $\emptyset \in \{\emptyset\}$, $\emptyset \in \mathcal{P}(\emptyset)$ *et* $\emptyset \neq \{\emptyset\}$.

3 Connecteurs

Les connecteurs logiques permettent de construire de nouvelles propositions à partir de propositions données. Les connecteurs sont représentés par un symbole et on peut indiquer leur mode d'emploi par une table de vérité.

3.1 Négation

Définition 4.

Etant donnée une proposition P, on appelle négation de P et on note non$P$ (ou $-P$ ou encore $\bar{P}$) la proposition qui est vraie lorsque P est fausse et fausse lorsque P est vraie.

On résume cela par la table de vérité suivante :

P	non P
V	
F	

Propriété 2.

- *non(non$P$)* $\equiv$ P.
- *la négation d'une propriété toujours fausse est une propriété toujours vraie*
- *la négation d'une propriété toujours vraie est une propriété toujours fausse*

Remarque 5. — *non$(x = y)$* $\equiv$ $x \neq y$.

— *non*($A \subset B$) $\equiv$ $A \not\subset B$.
— *l'une des deux propositions P et non$P$ est vraie (principe du tiers exclu).*
— *P et non$P$ ne peuvent être vraies simultanément (principe de non contradiction).*

Négation d'une proposition contenant des quantificateurs :
$\forall x \in E,\ P(x) \quad \equiv \quad E_P = E$ donc non$(\forall x \in E,\ P(x)) \quad \equiv \quad E_P \neq E$. Il existe donc un élément x de E qui n'appartient pas à E_P, c'est-à-dire pour qui $P(x)$ est fausse.

Propriété 3 (Négation d'une proposition contenant des quantificateurs).

non$(\forall x \in E,\ P(x)) \quad \equiv \quad \exists x \in E,\ $*non*$(P(x))$.
non$(\exists x \in E,\ P(x)) \quad \equiv \quad \forall x \in E,\ $*non*$(P(x))$.

► Exemple : Comment écrire avec les quantificateurs la négation de "f est paire" ?

3.2 Conjonction

Définition 5.

Etant données deux propositions P et Q, on appelle conjonction de P et de Q et on note "P et Q" la proposition qui est vraie si et seulement si les deux propositions P et Q sont simultanément vraies.

P	Q	P et Q
V	V	
V	F	
F	V	
F	F	

Propriété 4 (REGLES PRINCIPALES).

Soit F une proposition toujours fausse (antilogie) et V une proposition toujours vraie (tautologie). Pour toutes propositions P, Q et R on a :

1. P et $P \quad \equiv \quad P$
2. P et $F \quad \equiv \quad F$
3. P et $V \quad \equiv \quad P$
4. P et non$(P) \quad \equiv \quad F$
5. $(P$ et $Q)$ et $R \quad \equiv \quad P$ et $(Q$ et $R)$

Conjonctions et quantificateurs :
$\forall x \in E,\ P(x)$ et $Q(x) \quad \equiv \quad (\forall x \in E,\ P(x))$ et $(\forall x \in E,\ Q(x))$, mais "$\exists x \in E,\ P(x)$ et $Q(x)$" et "$(\exists x \in E,\ P(x))$ et $(\exists x \in E,\ Q(x))$" ne sont pas synonymes en général. En effet, "$\exists x \in \mathbb{N},\ x = 0$ et $x = 1$" est fausse alors que "$(\exists x \in \mathbb{N},\ x = 0)$ et $(\exists x \in \mathbb{N},\ x = 1)$" est vraie.

3.3 Disjonction (ou inclusif)

Définition 6.

Etant données deux propositions P et Q, on appelle disjonction de P et de Q et on note "P ou Q" la proposition qui est vraie si et seulement si l'une au moins des deux propositions P et Q est vraie.

P	Q	P ou Q
V	V	
V	F	
F	V	
F	F	

Propriété 5 (REGLES PRINCIPALES).

Soit F une proposition toujours fausse et V une proposition toujours vraie. Pour toutes propositions P, Q et R on a :

1. P *ou* $P \quad \equiv \quad P$
2. P *ou* $F \quad \equiv \quad P$
3. P *ou* $V \quad \equiv \quad V$
4. P *ou non*$(P) \quad \equiv \quad V$
5. $(P$ *ou* $Q)$ *ou* $R \quad \equiv \quad P$ *ou* $(Q$ *ou* $R)$

Disjonctions et quantificateurs :
$\exists x \in E,\ P(x)$ ou $Q(x) \quad \equiv \quad (\exists x \in E,\ P(x))$ ou $(\exists x \in E,\ Q(x))$, mais "$\forall x \in E,\ P(x)$ ou $Q(x)$" et "$(\forall x \in E,\ P(x))$ ou $(\forall x \in E,\ Q(x))$" ne sont pas synonymes en général. En effet, "$\forall x \in \mathbb{N},\ x < 10$ ou $10 \leq x$" est vraie alors que "$(\forall x \in \mathbb{N},\ x < 10)$ ou $(\forall x \in \mathbb{N},\ 10 \leq x)$" est fausse.

Propriété 6 (Propriétés mêlant les trois connecteurs précédents).

1. P *et* $(Q$ *ou* $R) \quad \equiv \quad (P$ *et* $Q)$ *ou* $(P$ *et* $R)$.
2. P *ou* $(Q$ *et* $R) \quad \equiv \quad (P$ *ou* $Q)$ *et* $(P$ *ou* $R)$.
3. *non*$(P$ *ou* $Q) \quad \equiv \quad ($*non*P *et non*$Q)$.
4. *non*$(P$ *et* $Q) \quad \equiv \quad ($*non*P *ou non*$Q)$.
5. P *et* $(P$ *ou* $Q) \quad \equiv \quad P$.
6. P *ou* $(P$ *et* $Q) \quad \equiv \quad P$.

3.4 Implication

Ce connecteur logique traduit le "si...alors" du langage courant.

Définition 7.

Etant données deux propositions P et Q, on appelle implication de P et de Q et on note "$P \Rightarrow Q$" la proposition qui est fausse si et seulement si P est vraie et Q est fausse.
L'implication $Q \Rightarrow P$ est dite réciproque de $P \Rightarrow Q$. L'implication non$Q \Rightarrow$ non$P$ est dite contraposée de l'implication $P \Rightarrow Q$.

P	Q	$P \Rightarrow Q$
V	V	
V	F	
F	V	
F	F	

Si P a pour valeur de vérité F, quelle que soit la valeur de vérité de Q, l'énoncé $P \Rightarrow Q$ est V.

Propriété 7 (REGLES PRINCIPALES).

Soit F une proposition toujours fausse et V une proposition toujours vraie. Pour toutes propositions P, Q et R on a :

1. $P \Rightarrow P \quad \equiv \quad V$
2. $P \Rightarrow F \quad \equiv \quad nonP$
3. $F \Rightarrow P \quad \equiv \quad V$
4. $P \Rightarrow V \quad \equiv \quad V$
5. $V \Rightarrow P \quad \equiv \quad P$
6. *$(P \Rightarrow Q) \Rightarrow R$ et $P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)$ ne sont pas en général synonymes (contrexemple avec le cas où les trois propriétés sont fausses)*
7. $P \Rightarrow Q \quad \equiv \quad nonP$ *ou* Q
8. *$nonQ \Rightarrow nonP$ est synonyme de $P \Rightarrow Q$*

► Exemple : Soient E et F deux ensembles et f une application de E vers F. f est injective s'écrit :

$$\forall x_1 \in E,\ \forall x_2 \in E,\ f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Propriété 8 (NEGATION D'UNE IMPLICATION).

$non(P \Rightarrow Q) \quad \equiv \quad (P$ et $nonQ)$.
La négation d'une implication n'est pas une implication ! C'est une conjonction.

Quand on écrit l'implication $P \Rightarrow Q$, on dit que :
— P est une condition suffisante pour Q,
— pour que Q soit vraie, il suffit que P le soit,
— Q est une condition nécessaire pour P,
— pour que P soit vraie, il faut que Q le soit.

Un moyen mnémotechnique pour se souvenir de ces définitions est de considérer la proposition : "Si une fonction est dérivable alors elle est continue". Vos connaissances en analyse vous permettront de vous souvenir que la condition nécessaire est la continuité (pour qu'une fonction soit dérivable il faut qu'elle soit continue) et que la condition suffisante est la dérivabilité (pour qu'une fonction soit continue il suffit qu'elle soit dérivable).

► Exemple : Montrer que $((P \Rightarrow Q)$ et $(Q \Rightarrow R)) \Rightarrow (P \Rightarrow R)$

Remarque 6. *Lorsqu'on écrit $P \Rightarrow Q \Rightarrow R$, cela signifie $P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow R$.*

3.5 Equivalence

Définition 8.

Etant données deux propositions P et Q, on appelle équivalence de P et de Q et on note "$P \Leftrightarrow Q$" la proposition qui est vraie si et seulement si P et Q ont mêmes valeurs de vérité.

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
V	V	
V	F	
F	V	
F	F	

Propriété 9 (REGLES PRINCIPALES).

Soit F une proposition toujours fausse et V une proposition toujours vraie. Pour toutes propositions P, Q et R on a :

1. $P \Leftrightarrow P \quad \equiv \quad V$
2. $P \Leftrightarrow \text{non}P \quad \equiv \quad F$
3. $Q \Leftrightarrow P \quad \equiv \quad P \Leftrightarrow Q$
4. $P \Leftrightarrow Q \quad \equiv \quad Q \Rightarrow P \text{ et } P \Rightarrow Q$
5. $(P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow R \quad \equiv \quad P \Leftrightarrow (Q \Leftrightarrow R)$

Quand on écrit l'implication $P \Leftrightarrow Q$, on dit que :
— P est une condition nécessaire et suffisante pour Q,
— Q est vraie si et seulement si P est vraie,
— pour que P soit vraie, il faut et il suffit que Q le soit.
► Méthode : Pour montrer que $P \Leftrightarrow Q$, on revient à la définition logique et on montre que $P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow P$ sont vraies simultanément.

Propriété 10.

Quelles que soient les valeurs de vérité P, Q et R, l'énoncé ($P \Leftrightarrow Q$ et $Q \Leftrightarrow R$) est synonyme de ($P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow R$ et $R \Rightarrow P$).

► Méthode : Pour montrer que $P \Leftrightarrow Q \Leftrightarrow R$, il suffit de montrer les trois implications ($P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow R$ et $R \Rightarrow P$).

4 Différents types de raisonnement

4.1 Raisonnement par implication (déduction)

On part d'une hypothèse, proposition réputée vraie, et on essaie de prouver la véracité d'une autre proposition, la conclusion.

4.1.1 Raisonnement direct

On suppose que H est vraie, on montre que $H \Rightarrow C$ est vraie, on en déduit que la conclusion, proposition C, est vraie.
On fait cette déduction d'après la définition de l'implication : si H et $H \Rightarrow C$ sont vraies en même temps alors C ne peut être que vraie.
► Exemple : Soit n un entier. Montrer que si n est pair alors n^2 est pair.

Il peut y avoir des étapes intermédiaires d'après la propriété : $((P \Rightarrow Q) \text{ et } (Q \Rightarrow R)) \Rightarrow (P \Rightarrow R)$.
Pour montrer qu'une proposition n'est pas toujours vraie, il suffit de donner un contre-exemple, c'est-à-dire d'exhiber un cas qui donne à la proposition la valeur "faux" car $\text{non}(\forall x \in E,\ P(x)) \quad \equiv \quad \exists x \in E,\ \text{non}(P(x))$. Par exemple, $(\forall x \in \mathbb{N},\ \forall y \in \mathbb{N},\ x < y) \Rightarrow (\exists z \in \mathbb{N},\ (x < z \text{ et } z < y))$ est fausse ($x = 2$ et $y = 3$).

4.1.2 Contraposée

La propriété $P \Rightarrow Q$ est synonyme de non$Q \Rightarrow$ non$P$. Lorsque la preuve de la contraposée paraît plus simple à établir, on remplace $P \Rightarrow Q$ par non$Q \Rightarrow$ non$P$.
► Exemple : Montrer que $(x \neq y) \Rightarrow (x^3 + x \neq y^3 + y)$, x, y étant deux réels quelconques.
► Exemple : Enoncer la contraposée de l'énoncé : "si n est pair, alors n^2 est pair".

4.1.3 Raisonnement par l'absurde

Pour démontrer qu'une propriété est vraie il revient au même de démontrer que sa négation est fausse. Or $(H \Rightarrow C) \quad \equiv \quad$ (non$H$ ou C). Sa négation est donc synonyme de H et non$C$. On suppose que H est vraie et que C est fausse et on démontre qu'on arrive à une contradiction, *i.e.*, H et non$C$ est fausse donc $H \Rightarrow C$ est vraie.

► Exemple : Soit ABC un triangle tel que $AC = 9$, $AB = 8$ et $BC = 4$. Montrer que ABC n'est pas rectangle en B.

4.2 Raisonnement par récurrence

4.2.1 Récurrence simple

Soit P une proposition et n une variable entière, on veut montrer que la propriété $P(n)$ est vraie pour toute valeur de n.
La démonstration se réduit à établir que :
— $P(0)$ est vraie (0 vérifie la propriété). C'est l'initialisation de la récurrence
— pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $P(n)$ est vraie alors il en est de même pour $P(n+1)$ (hérédité)
On en déduira alors que $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.
Dans la pratique, on peut partir du rang n_0 plutôt que de 0.
inférieurs ou égaux à n.
► Exemple : Montrer par récurrence que la somme des n premiers entiers impairs est égale au carré de n.

4.2.2 Récurrence d'ordre 2

Il peut arriver que, pour l'hérédité, quand il s'agit de démontrer $P(n+1)$, on ait besoin de supposer la propriété aux deux rangs précédents, c'est-à-dire non seulement pour n, mais aussi pour $n-1$. On est amené à utiliser le principe de récurrence suivant :
Soit $P(n)$ une propriété définie sur $\mathbb{N}$, si :
— $P(0)$
— $P(1)$
— pour tout $n \in \mathbb{N}$, $[P(n) \; et \; P(n+1)] \Rightarrow P(n+2)$
alors $P(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

► Exemple : Soit la suite F définie par :

$$F_0 = 0, \; F_1 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, \; F_{n+2} = F_n + F_{n+1}.$$

Cette suite est la suite de Fibonacci (Leonardo Fibonacci, mathématicien italien, 1170-1250, . avec $\phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, montrer que $F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \leq a^{n-1}$

4.2.3 Récurrence forte (ou avec prédécesseurs)

Il est parfois nécessaire, dans des raisonnements par récurrence, d'utiliser une version plus forte pour l'hérédité :
Soit $P(n)$ une propriété définie sur $\mathbb{N}$, si :
— $P(0)$
— pour tout $n \in \mathbb{N}$, $[\forall k \leq n, \; P(k)] \Rightarrow P(n+1)$
alors $P(n)$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.
Donc pour démontrer la propriété au rang suivant on peut la supposer vraie pour tous les rangs inférieurs. Cette récurrence peut également se décaler à partir d'un certain rang, exactement comme la récurrence simple.
► Exemple : Démontrer que tout entier naturel supérieur ou égal à 2 possède un diviseur premier.

4.3 Disjonction des cas

Si on a (P ou Q) et ($P \Rightarrow R$) et ($Q \Rightarrow R$), alors on a R. Ainsi, pour démontrer le théorème R, il suffit de montrer que l'on a P ou Q et que dans chacun des cas, on peut en déduire R.
► Exemple : Montrer que $\dfrac{n(n+1)}{2}$ est un entier.
► Exemple : Montrer que n et n^2 ont toujours même parité.
► Exemple : Pour tout entier n, l'entier $n(n+1)(2n+1)$ est-il toujours un multiple de 3 ?

4.4 Raisonnement par analyse - synthèse

Le raisonnement par analyse-synthèse est un type de raisonnement mathématique qui est souvent employé pour démontrer l'existence et l'unicité d'un élément x de E pour lequel $P(x)$ est vrai. Il se décompose en deux parties :

— l'analyse : on suppose qu'il existe un élément x de E tel que $P(x)$ est vrai et on essaie de trouver des conditions nécessaires que doit vérifier x. Ce faisant, on prouve que si x existe, alors il est nécessairement égal à un certain élément a (ceci assure l'unicité).

— la synthèse : on considère l'élément a identifié dans la partie analyse, et on vérifie que $P(a)$ est vrai (ceci assure l'existence).

► Exemple : Montrer que pour tout triplet de points A, B, C non alignés, il existe un unique point M tel que $MA = MB = MC$.

► Exemple : Montrer que toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$ s'écrit de manière unique comme somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

5 Règles élémentaires de construction d'ensembles

Aux connecteurs qui permettent de construire des propositions nouvelles à partir de propositions anciennes, on peut associer des opérations qui permettent de définir des parties de $\mathcal{P}(E)$ à partir d'anciennes.
Soit E un ensemble servant de référentiel, à toute partie de E on peut associer une proposition, et réciproquement.
Soient A et B deux parties associées aux propositions P et Q :
$A = \{x \in E \mid P(x)\},\ B = \{x \in E \mid Q(x)\},\ E = \{x \in E \mid V(x)\}$ et $\emptyset = \{x \in E \mid F(x)\}$
$x \in A$ est synonyme de $P(x)$ et $x \in B$ est synonyme de $Q(x)$.

5.1 Complémentaire

Définition 9.

Soit $A \subset E$, on appelle complémentaire de A dans E l'ensemble noté $C_E A$ ou $\bar{A}$ ou A^C ou $E \setminus A$, défini par $C_E A = \{x \in E \mid x \notin A\}$. C'est l'ensemble des éléments de E qui n'appartiennent pas à A.

$A = \{x \in E \mid P(x)\} \Leftrightarrow C_E A = \{x \in E \mid \text{non}P(x)\}$.
A la notion logique de négation correspond la notion ensembliste de complémentaire. Les propriétés des complémentaires peuvent être obtenues en transposant celle de la négation.

Propriété 11.

— *$C_E(C_E A) = A$ car non(non$P$) $\equiv$ P.*

— *$C_E(E) = \emptyset$ et $C_E(\emptyset) = E$ car la négation d'une propriété toujours vraie est une propriété toujours fausse et la négation d'une propriété toujours fausse est une propriété toujours vraie.*

5.2 Intersection

Définition 10.

Soient A et B deux ensembles, on appelle intersection de A et B l'ensemble noté $A \cap B$, défini par $A \cap B = \{x \in E \mid x \in A \text{ et } x \in B\}$. C'est l'ensemble des élements de E qui appartiennent simultanément à A et à B. On lit 'A inter B'.

Si $A = \{x \in E \mid P(x)\}$ et $B = \{x \in E \mid Q(x)\}$, on peut écrire $A \cap B = \{x \in E \mid P(x) \text{ et } Q(x)\}$.
A la notion logique de conjonction correspond la notion ensembliste d'intersection. Les propriétés de l'intersection peuvent être obtenues en transposant celle de la conjonction.

Propriété 12 (REGLES PRINCIPALES).

1. $A \cap A = A$ *car* P *et* $P \quad \equiv \quad P$
2. $A \cap \emptyset = \emptyset$ *car* P *et* $F \quad \equiv \quad F$
3. $A \cap E = A$ *car* P *et* $V \quad \equiv \quad P$
4. $A \cap C_E A = \emptyset$ *car* P *et non*$(P) \quad \equiv \quad F$.
5. $A \cap B = B \cap A$
6. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ *car*$(P$ *et* $Q)$ *et* $R \quad \equiv \quad P$ *et* $(Q$ *et* $R)$
7. $A \cap B \subset A$ *et* $A \cap B \subset B$

Définition 11.

On dit que A et B sont disjoints lorsque $A \cap B = \emptyset$

5.3 Réunion

Définition 12.

Soient A et B deux ensembles, on appelle réunion de A et B l'ensemble noté $A \cup B$, défini par $A \cup B = \{x \in E \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$. C'est l'ensemble des élements de E qui appartiennent à l'une quelconque des deux parties A et B. On lit 'A union B'.

Si $A = \{x \in E \mid P(x)\}$ et $B = \{x \in E \mid Q(x)\}$, on peut écrire $A \cup B = \{x \in E \mid P(x) \text{ ou } Q(x)\}$.
A la notion logique de disjonction correspond la notion ensembliste de réunion. Les propriétés de la réunion peuvent être obtenues en transposant celle de la disjonction.

Propriété 13 (REGLES PRINCIPALES).

1. $A \cup A = A$ *car* P *ou* $P \quad \equiv \quad P$
2. $A \cup \emptyset = A$ *car* P *ou* $F \quad \equiv \quad P$
3. $A \cup E = E$ *car* P *ou* $V \quad \equiv \quad V$
4. $A \cup C_E A = E$ *car* P *ou non*$(P) \quad \equiv \quad V$.
5. $A \cup B = B \cup A$
6. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ *car* $(P$ *ou* $Q)$ *ou* $R \quad \equiv \quad P$ *ou* $(Q$ *ou* $R)$
7. $A \subset A \cup B$ *et* $B \subset A \cup B$
8. $A \subset D$ *et* $B \subset D \Rightarrow A \cup B \subset D$.

5.4 Propriétés mêlant les trois opérations précédentes

Propriété 14.

1. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ *car* P *et* $(Q$ *ou* $R) \quad \equiv \quad (P$ *et* $Q)$ *ou* $(P$ *et* $R)$.
2. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ *car* P *ou* $(Q$ *et* $R) \quad \equiv \quad (P$ *ou* $Q)$ *et* $(P$ *ou* $R)$.
3. $C_E(A \cup B) = C_E A \cap C_E B$ *car non*$(P$ *ou* $Q) \quad \equiv \quad ($*non*P *et non*$Q)$.
4. $C_E(A \cap B) = C_E A \cup C_E B$ *car non*$(P$ *et* $Q) \quad \equiv \quad ($*non*P *ou non*$Q)$.
5. $A \cup (A \cap B) = A$ *car* P *ou* $(P$ *et* $Q) \quad \equiv \quad P$.
6. $A \cap (A \cup B) = A$ *car* P *et* $(P$ *ou* $Q) \quad \equiv \quad P$.
7. $A = (A \cap B) \cup (A \cap C_E B)$.

► Exemple : on appelle partition d'un ensemble E tout ensemble de parties non vides de E, deux à deux disjointes et dont la réunion est l'ensemble E tout entier. Ainsi $\{P, I\}$ est une partition de $\mathbb{N}$, avec P ensemble des entiers naturels pairs et I ensemble des entiers naturels impairs.

5.5 Différence de deux ensembles

Définition 13.

On appelle <u>*différence de l'ensemble A par l'ensemble B*</u> *l'ensemble* $A \setminus B$ *défini par* $A \setminus B = \{x \in E \mid x \in A \text{ et } x \notin B\}$. *C'est l'ensemble des éléments qui appartiennent à A mais pas à B. On lit 'A moins B'.*

$$A \setminus B = \{x \in E \mid P(x) \text{ et } \mathrm{non}Q(x)\} = A \cap C_E B$$

Propriété 15 (Règles principales).

Pour toutes parties A et B de E on a :

1. $A \setminus A = \emptyset$.
2. $A \setminus \emptyset = A$.
3. $\emptyset \setminus A = \emptyset$.
4. $A \setminus E = \emptyset$.
5. $E \setminus A = C_E A$.
6. $A \setminus C_E A = A$.
7. $C_E A \setminus A = C_E A$.

Remarque 7. $A \setminus B \neq B \setminus A$ *(prendre* $B = \emptyset$*).*
Exemple : $\mathbb{R} \setminus \{0\} = \mathbb{R}^*$.

5.6 Produit cartésien

Définition 14.

Etant donnés deux objets x et y, on définit <u>*le couple* (x, y)</u> *avec la propriété fondamentale :*

$$(x, y) = (x', y') \Leftrightarrow x = x' \text{ et } y = y'$$

Définition 15.

On appelle <u>*produit cartésien de deux ensembles E et F*</u> *et on note* $E \times F$ *l'ensemble des couples dont le premier élément appartient à E et le second à F.*

$$E \times F = \{(x, y) \mid x \in E \text{ et } y \in F\}$$

Remarque 8. *Si* $E = F$*, on note* $E \times E = E^2$*. Par exemple* $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R} \text{ et } y \in \mathbb{R}\}$.
Si $E \neq F$, $E \times F \neq F \times E$.

Généralisation :

$E \times F \times G = \{(x, y, z) \mid x \in E \text{ et } y \in F \text{ et } z \in G\}$ ((x, y, z) s'appelle un <u>triplet</u>).
$E^3 = E \times E \times E$.
Généralisation à n éléments, $n \in \mathbb{N}^*$: on peut définir des <u>n-uplets $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$</u>. On a alors

$$E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \mid \forall k \in [[1, n]],\ x_k \in E_k\},$$

où $[[1, n]]$ est l'ensemble des entiers compris entre 1 et n.
$E^n = E \times E \times \cdots \times E$.

5.7 Recouvrement disjoint, partition

Définition 16.

Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties d'un ensemble E.
On dit que $(A_i)_{i\in I}$ est un recouvrement de E si $\cup_{i\in I} A_i = E$.
On dit que $(A_i)_{i\in I}$ est un recouvrement disjoint de E si $(A_i)_{i\in I}$ est un recouvrement de E constitué d'ensembles deux à deux disjoints, c'est-à-dire que les $(A_i)_{i\in I}$ vérifient :

$$\forall (i,j) \in I^2, \quad i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset.$$

On dit que $(A_i)_{i\in I}$ est une partition de E si c'est un recouvrement disjoint de E constitué d'ensembles non vides.

Par exemple, l'ensemble des nombres pairs et l'ensemble des nombres impairs forment une partition de l'ensemble des entiers.
Si $A \subset E$ et $A \neq E$ et $A \neq \emptyset$ alors $(A, \bar{A})$ est une partition de E. Partition de $[[2, 9]]$?

un peu d'histoire des maths...

Depuis la plus haute antiquité, les hommes appliquent dans leurs déductions mathématiques et dans leurs recherches philosophiques des types de raisonnement rigoureux que l'on peut qualifier de "logiques". Mais le mérite d'avoir tenté de rendre ces schémas de pensée explicites revient aux Grecs (Stoïciens) avec en particulier l'étude des syllogismes (par exemple : *Tous les hommes sont mortels, or les Grecs sont des hommes, donc les Grecs sont mortels*). Platon a beaucoup débattu avec les sophistes pour essayer de démasquer leurs raisonnements trompeurs et bâtis sur une logique non-rigoureuse, mais c'est surtout Aristote qui a inventé la science de la logique pour classer les types de raisonnements et montrer rigoureusement quelle est la "logique" fallacieuse à l'oeuvre dans un sophisme. Voici deux sophismes :

- *Plus il y a d'emmental, plus il y a de trous. Plus il y a de trous, moins il y a d'emmental. Donc plus il y a d'emmental, moins il y a d'emmental.*
- *Tout ce qui est rare est cher, un cheval bon marché est rare, donc un cheval bon marché est cher.*

Au dix-huitième siècle le philosophe et mathématicien Leibniz entreprend de traiter formellement les mathématiques ; il se donne pour objectif de réduire l'ensemble des idées à quelques concepts fondamentaux et de ramener la pensée à un système opératoire rigoureux combinant ces principes de base. En particulier il introduit une grande partie de la notation mathématique moderne (usage des quantificateurs, symbole d'intégration, etc).

A la fin du dix-neuvième siècle, la "crise des fondements", due à la complexification des mathématiques, à l'apparition de paradoxes et aux problèmes soulevés par la théorie des ensembles (Cantor), conduit à la naissance de la "Logique Mathématique". Ses débuts sont marqués par la rencontre entre deux idées nouvelles : la volonté chez Frege, Russell, Peano et Hilbert de donner une fondation axiomatique aux mathématiques d'une part et d'autre part la découverte par Boole de l'existence de structures algébriques permettant de définir un "calcul de vérité". Dans ce calcul les combinaisons logiques comme la conjonction, la disjonction et l'implication, sont des opérations analogues à l'addition ou la multiplication des entiers, mais portant sur les valeurs de vérité faux et vrai (ou 0 et 1) ; ces opérations booléennes se définissent au moyen de tables de vérité.

Depuis son apparition, la logique a connu de considérables développements, notamment avec les théorèmes de Gödel ; elle se prononce sur la validité de théories mathématiques et elle occupe une place centrale en informatique.