TD 1 : Calculs algébriques

▶ Exercice 1 : Calculer les sommes suivantes pour tout entier naturel n (éventuellement non nul).

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 1$ 2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 1$ 3. $\displaystyle\sum_{k=p}^{q} 1$ 4. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k+1)$ 5. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2.5^k$ 6. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 3^{k+1}$ 7. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (k^2-3^k)$
8. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (k^2+k-1)$ 9. $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} (k^2+2k+1)$ 10. $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} k$ 11. $\displaystyle\sum_{k=4}^{n+1} k$ 12. $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} (k^2-2k)$

▶ Exercice 2 : Simplifier $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$ puis $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$. On remarquera que $\displaystyle\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$.

▶ Exercice 3 : Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = (\sum_{k=1}^{n} k)^2$.

▶ Exercice 4 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, calculer : $\displaystyle U_n = \prod_{k=0}^{n} 3\exp(-k^2)$, $\displaystyle V_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1+\frac{1}{k}\right)$ et $\displaystyle W_n = \prod_{k=1}^{n} 2^{\frac{1}{k(k+1)}}$.

▶ Exercice 5 : Calculer les sommes : $\displaystyle A = \sum_{0\leq i,j\leq n} (1-ij+3^j)$, $\displaystyle B = \sum_{k=1}^{n} k2^k$, $\displaystyle C = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} \frac{1}{j}$ et $\displaystyle D = \sum_{1\leq k\leq i\leq n} \frac{k}{i}$.

▶ Exercice 6 : Simplifier

1. $\displaystyle\frac{(n+1)!}{(n-2)!}$ 2. $\displaystyle\frac{\binom{n-1}{2}}{\binom{n}{2}}$ 3. $\displaystyle\frac{\binom{n+1}{n-2}}{\binom{n}{3}}$ 4. $\displaystyle\binom{n+3}{3}$ 5. $\displaystyle\binom{n+4}{n}$

▶ Exercice 7 :

1. Soient n et k deux entiers non nuls tels que $n \geq k$. Faire apparaître des factorielles dans les expressions suivantes : $n(n-1)...(n-k+1)$, $(n+k)(n+k-1)...(n-1)$, $\displaystyle\frac{2.4.6.8...(2n)(2n+2)}{1.3.5.7...(2n+1)}$.
2. Vrai ou Faux ? $\displaystyle\frac{13!}{5!7!} = \binom{13}{5} \times 8$; $\displaystyle\frac{13!}{5!7!} = \binom{13}{8} \times 8$; $\displaystyle\frac{13!}{5!7!} = \binom{12}{5} \times 13$.

▶ Exercice 8 : Calculer les sommes suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k}$ 2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} 2^k$ 3. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} 3^{k+1}$ 4. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k+1} 5^{-k}$ 5. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} 4^{1-k}$

▶ Exercice 9 : Calculer $\displaystyle\sum_{0\leq 2k\leq n} \binom{n}{2k}$ et $\displaystyle\sum_{0\leq 2k+1\leq n} \binom{n}{2k+1}$ (faire la somme et la différence des deux sommes).

▶ Exercice 10 : Soient k, p, n des entiers naturels tels que $p \leq k \leq n$. Montrer que
$\displaystyle\binom{n-p}{k-p}\binom{n}{p} = \binom{n}{k}\binom{k}{p}$ et en déduire la valeur des sommes : $\displaystyle\sum_{p=0}^{k} \binom{n-p}{k-p}\binom{n}{p}$ et $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}\binom{k}{p}$.