TD 2 : LOGIQUE ELEMENTAIRE

► Exercice 1 : On appelle barre de Sheffer et on note $\uparrow$ le connecteur défini par $(P \uparrow Q) \equiv \text{non}(P \text{ et } Q)$.

1. Dresser la table de vérité de la barre de Sheffer.
2. Exprimer les connecteurs *non*, *et* et *ou* à l'aide de ce seul connecteur.

► Exercice 2 : Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, on a : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$

► Exercice 3 : On dit qu'une fonction est majorée par le réel M si pour tout x on a $f(x) \leq M$. Soit la fonction $f \ : \ x \mapsto x^2$ et un réel M. Montrer que M ne majore pas la fonction f.

► Exercice 4 : Soit n un entier naturel. Montrer l'équivalence : n pair $\Leftrightarrow n^2$ pair.

► Exercice 5 : Montrer que $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel (on fera un raisonnement par l'absurde).

► Exercice 6 : Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$, $u_1 = 5$ et pour tout entier naturel n : $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$. Montrer que pour tout entier n, $u_n = 2^n + 3^n$.

► Exercice 7 : Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$. Montrer que pour tout entier n, $u_n \leq 2^n$.

► Exercice 8 : Un prisonnier dans un labyrinthe se trouve devant deux couloirs gardés chacun par un gardien. Il sait que l'un des couloirs mène à la liberté et l'autre renvoie dans le labyrinthe. Il sait aussi que l'un des gardiens dit toujours la vérité et que l'autre ment toujours. Il sait enfin qu'il peut corrompre un gardien pour poser une unique question. Quelle question lui permet-elle de recouvrer à coup sûr sa liberté ?

► Exercice 9 : Pour chacune des phrases suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse, énoncer sa négation ; enfin, lorsqu'il s'agit d'une implication, énoncer sa contraposée et sa réciproque et indiquer si celle-ci est vraie ou fausse :

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \leq x$.
2. $x \in [1; +\infty[\Rightarrow x^2 \geq x$.
3. $\exists x \in \mathbb{R},\ x^2 \geq x$.
4. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x = y \Leftrightarrow x^2 = y^2$.
5. $\forall x \in \mathbb{N},\ \exists y \in \mathbb{N},\ y > x^2$.
6. Si $2 = -2$, alors $(-2)^2 = 4$.
7. $\forall (a, b, c) \in \mathbb{R}^3,\ (a \neq b \text{ et } b \neq c) \Rightarrow a \neq c$

► Exercice 10 : Traduire formellement chacune des propositions suivantes par une implication et indiquer si elle est vraie ou fausse

1. Pour être multiple de 6, il est nécessaire d'être multiple de 3.
2. Pour être multiple de 6, il est suffisant d'être multiple de 3.
3. Pour que $x + 2 \geq 3$, il faut que x soit positif ou nul.

4. Pour que $x+2 \geq 3$, il suffit que $x \geq 2$.
5. $x^2 = 4$ seulement si $x = 2$.
6. n divise 12 si $n = 2$.

► Exercice 11 : Ecrire en langage formel les propositions suivantes, où f est une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels et A et B deux parties d'un ensemble E :

1. f n'est pas la fonction nulle.
2. f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.
3. f n'est pas croissante.
4. f est décroissante.
5. A n'est pas incluse dans B.
6. (u_n) est nulle à partir d'un certain rang.
7. Tout segment de $\mathbb{R}$ de longueur 1 contient au moins un entier.

► Exercice 12 : On suppose que l'ensemble E est non vide et ordonné, précisez (en "français") ce que signifie chacune des propositions suivantes et indiquer quelle conséquence en découle pour E :

1. $\forall x \in E,\ \exists y \in E,\ x \neq y$.
2. $\forall x \in E,\ \exists y \in E,\ x = y$.
3. $\exists x \in E,\ \forall y \in E,\ x = y$.
4. $\forall x \in E,\ \forall y \in E,\ \forall z \in E,\ (x = y \text{ ou } y = z \text{ ou } z = x)$.
5. $\forall x \in E,\ \exists y \in E,\ x < y$.
6. $\exists x \in E,\ \forall y \in E,\ x \geq y$.

► Exercice 13 : Soient A, B et C trois parties d'un ensemble E.

1. Montrer que $A \cup B = A \cap B \Leftrightarrow A = B$.
2. Montrer que $A \cap B = A \cap C \Leftrightarrow A \cap \bar{B} = A \cap \bar{C}$.
3. Montrer que $A \cup B = A \cup C \Leftrightarrow A \cup \bar{B} = A \cup \bar{C}$.
4. Montrer $(A \cup B \subset A \cup C)$ et $(A \cap B \subset A \cap C) \Leftrightarrow B \subset C$.

► Exercice 14 : Soit $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 - xy - 2y^2 = 0\}$ et $F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x = -y\}$. Montrer que $F \subset E$. A-t-on $F = E$?

► Exercice 15 : Déterminer $\cup_{n\in\mathbb{N}^*}]1 - \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}[$.