TD 3 : Nombres complexes et trigonométrie

▶ Exercice 1 : Simplifier $\dfrac{(5-i)^6}{(3+2i)^5}$.

▶ Exercice 2 : Mettre sous forme algébrique $(1+i)^{11}$, $\dfrac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}-i}$ et $\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^2$

▶ Exercice 3 : Déterminer l'ensemble des nombres complexes z tels que
1. $\dfrac{z+i}{z-3i} \in \mathbb{R}$. 2.$|\dfrac{z+i}{z-3i}| = 1$. 3.$\dfrac{2z+1}{iz-2} \in i\mathbb{R}^*$.

▶ Exercice 4 : Montrer que $\forall (z,z') \in \mathbb{C}^2$, $|z+z'|^2 + |z-z'|^2 = 2\left(|z|^2 + |z'|^2\right)$. En faire une interprétation géométrique.

▶ Exercice 5 : Montrer que pour tout nombre complexe z tel que $z \notin \mathbb{U}$, $|\dfrac{1-z^n}{1-z}| \leq \dfrac{1-|z|^n}{1-|z|}$.

▶ Exercice 6 : Dans chqcun des cas suivants, indiquer la région du plan complexes des points d'affixe z vérifiant la condition indiquée, où a et b désignent des réels fixés.

1. $|1+z| = a$,
2. $0 \leq a \leq |1-z| \leq b$,
3. $|z| = |1-z| = 1$,
4. $1 + |z| \leq a$.

▶ Exercice 7 : A quelle condition peut-on écrire $\sin x = \sqrt{1-\cos^2 x}$?
A quelle condition peut-on écrire $\cos x = \dfrac{-1}{\sqrt{1+\tan^2 x}}$?

▶ Exercice 8 : Linéariser $\cos^4 x + \sin^4 x$.

▶ Exercice 9 : Linéariser $\cos^4 x \times \sin^2 x$ et $\sin^6 x$.

▶ Exercice 10 : Exprimer $\cos(2x)$, $\cos(3x)$, $\cos(4x)$ et $\cos(5x)$ en fonction de $\cos(x)$.

▶ Exercice 11 : Factoriser $e^{ip} + e^{iq}$.
En déduire les formules donnant $\cos p + \cos q$ et $\sin p + \sin q$ sous forme de produits.

▶ Exercice 12 : Déterminer

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(k-1)x$, où x est un réel fixé.
2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{\cos(kx)}{\cos^k x}$, où x est un réel fixé tel que $\cos x \neq 0$.

▶ Exercice 13 : θ étant un réel donné, calculer $S_n(\theta) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cos^2(k\theta)$. En déduire que

$$\cos^2 \frac{\pi}{9} + \cos^2 \frac{2\pi}{9} + \cos^2 \frac{3\pi}{9} + \cos^2 \frac{4\pi}{9}$$

est un rationnel.