Exercice 1

On définit la fonction $f\ :\ x \mapsto \cos^3(x) + \sin^3(x)$.

1. Déterminer l'ensemble de définition, noté $\mathcal{D}$, de f.
2. Etudier la parité et la périodicité de f.
3. Déterminer $f(\frac{\pi}{2} - x)$ en fonction de $f(x)$ puis montrer que la droite d'équation $x = \frac{\pi}{4}$ est axe de symétrie de la courbe représentative de f.
4. Expliquer comment obtenir le tracé de la courbe représentative de f à partir de l'étude de f sur l'intervalle $[-\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$.
5. Montrer que f est dérivable sur $\mathcal{D}$ et déterminer f'.
6. En déduire les variations de f sur $[-\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$.
7. Tracer la courbe représentative de f.

Exercice 2

1. Soit $a \in \mathbb{C}^*$ et soit j le nombre $\dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$.
   (a) Montrer que $j \in \mathbb{U}$.
   (b) Déterminer j^2, j^3 et j^4 sous forme algébrique.
   (c) En travaillant sur les modules, montrer que le triangle dont les sommets A, B et C ont pour affixes a, ja et j^2a est équilatéral.
2. Montrer que si z et z' sont deux unimodulaires tels que $zz' \neq -1$, alors $\dfrac{z + z'}{1 + zz'} \in \mathbb{R}$.
3. Soit z un nombre complexe et n un entier naturel non nul.
   On pose $S_n(z) = nz^{n-1} + (n-1)z^{n-2} + \cdots + 3z^2 + 2z + 1$.
   (a) Ecrire $S_n(z)$ sous forme synthétique.
   (b) Calculer $S_n(1)$.
   (c) Calculer $(1 - z)S_n(z)$ et en déduire $S_n(z)$ lorsque $z \neq 1$.
   (d) En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} k \sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right)$.

Exercice 3

1. En vous inspirant de l'exemple de la fonction Arcsinus traité en cours, montrer que $F\ :\ [0, \pi] \to \mathbb{R},\ x \mapsto \cos x$ réalise une bijection de $[0, \pi]$ vers un intervalle à déterminer. La bijection réciproque de F se note Arccos. Donner la courbe de représentative de Arccos et préciser les valeurs de Arccos(1), Arccos(0) et Arccos(-1). Etudier la dérivabilité de Arccos et préciser, pour tout $y \in]-1, 1[$, Arccos'(y).
2. Montrer que $h\ :\ ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R},\ x \mapsto \tan x$ réalise une bijection de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ vers un intervalle à déterminer. La bijection réciproque de h se note Arctan. Donner la courbe de représentative de Arctan et préciser les valeurs de Arctan(0), Arctan(1) et Arctan(-1) et les limites de Arccos(x) lorsque x tend vers $+\infty$ et $-\infty$. Etudier la dérivabilité de Arctan et préciser, pour tout $y \in \mathbb{R}$, Arctan'(y).
3. $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est un repère orthonormé du plan.
   g est la fonction définie par
   $$g(0) = 0 \ et\ g(x) = x^2 \sin(\frac{1}{x})\ pour\ x \neq 0.$$
   (a) Démontrer que g est dérivable en 0. On pourra utiliser le théorème des gendarmes.
   (b) Soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative de g dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Donner une équation de la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.
   (c) Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer $g'(x)$ pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$.