TD4 cor

Ex 3

① f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que somme de fonctions dérivables
f est impaire en tant que somme de 2 fonctions impaires donc on peut restreindre l'intervalle d'étude à $\mathbb{R}^+$ (symétrie par rapport à O)
$f(x+2\pi) = x+2\pi - \sin(x+2\pi) = x+2\pi - \sin x = f(x)+2\pi$ pour tout x réel.
On peut donc restreindre l'étude à un intervalle de longueur 2π, par exemple $[-\pi,\pi]$ et déduire le reste de la courbe par translations de vecteur $2k\pi\vec{i}$, $k \in \mathbb{Z}$.
Ainsi on déduit des 2 points précédents que l'on peut restreindre l'étude à l'intervalle $[0,\pi]$.
$\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 1-\cos x \geq 0$ On a donc le tableau

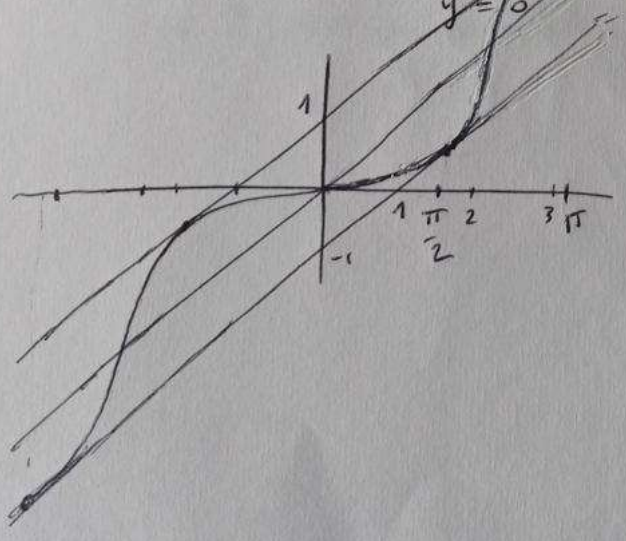
x	0	π
$f(x)$	0 ↗	π

② $\forall x \in \mathbb{R}$ $\quad -1 \leq \sin x \leq 1$
$\forall x \in \mathbb{R}$ $\quad -1 \leq -\sin x \leq 1$
$\forall x \in \mathbb{R}$ $\quad x-1 \leq x-\sin x \leq x+1$
$\mathcal{C}_f$ est située dans la zone comprise entre les droites d'équation $y = x-1$ et $y = x+1$

③ Soit $x \in \mathbb{R}$ $\quad f(x) = x-1$ ssi $x - \sin x = x-1$ ssi $\sin x = 1$ ssi $x \equiv \frac{\pi}{2}\,[2\pi]$
$\quad f(x) = x+1$ ssi $x - \sin x = x+1$ ssi $\sin x = -1$ ssi $x \equiv -\frac{\pi}{2}\,[2\pi]$

④ L'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse $\frac{\pi}{2}$ est :
$$y = f'\left(\tfrac{\pi}{2}\right)\left(x-\tfrac{\pi}{2}\right) + f\left(\tfrac{\pi}{2}\right) = \left(1-\cos\tfrac{\pi}{2}\right)\left(x-\tfrac{\pi}{2}\right) + \tfrac{\pi}{2} - \sin\tfrac{\pi}{2} = x - \tfrac{\pi}{2} + \tfrac{\pi}{2} - 1 = x-1$$
Par symétrie centrale par rapport à O, l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse $-\frac{\pi}{2}$ est : $y = x+1$

⑤ La droite d'équation $y = x-1$ est tangente à la courbe au point d'abscisse $\frac{\pi}{2}$
$y = x+1$ " " " " " $-\frac{\pi}{2}$
$y = 0$ " " " " " 0



Ex 5 TD4

① Soit $x \in \mathbb{R}$. $x^4+1 \geq 1$ et $x^2+1 \geq 1$ donc f et g sont définies sur $\mathbb{R}$

Soit $x \in \mathbb{R} \setminus [-1,1]$, $x^4 > x^2$ donc $1+x^4 > 1+x^2$ et $\frac{1}{1+x^4} < \frac{1}{1+x^2}$

Soit $x \in [-1,1]$, $x^4 \leq x^2$ donc $1+x^4 \leq 1+x^2$ et $\frac{1}{1+x^4} \geq \frac{1}{1+x^2}$

Ainsi $f \geq g$ sur $[-1,1]$ et $f < g$ sur $\mathbb{R} \setminus [-1,1]$
($\mathcal{C}_f$ est au dessus de $\mathcal{C}_g$) ($\mathcal{C}_f$ est en dessous de $\mathcal{C}_g$)

② • Soit $x \in [\frac{1}{2},3]$. On a $\frac{1}{3} \leq \frac{1}{x} \leq 2$ donc $\frac{1}{2}+\frac{1}{3} \leq x+\frac{1}{x} \leq 2+3$

Donc f est majorée et minorée donc bornée sur $[\frac{1}{2},3]$

• $\lim\limits_{x\to+\infty} x+\frac{1}{x} = +\infty$ donc f n'est pas majorée sur $[1,+\infty[$ en revanche f est minorée par 0, car si $x \geq 1$ alors $x \geq 0$ et $\frac{1}{x} \geq 0$.

• $\lim\limits_{x\to 0^+} x+\frac{1}{x} = +\infty$ donc f n'est pas majorée sur $]0,1]$ mais elle est minorée par 0 car si $x>0$ alors $\frac{1}{x}>0$ et $x+\frac{1}{x}>0$.

Dans les 2 derniers cas, f n'est pas bornée.

③ ⓐ Soit $x \in \mathbb{R}$. $f(x) = |2x-1|+|x+3| \leq |2x|+|1|+|x|+|3| = 2|x|+|x|+4$
$\leq 3|x|+4$ par la 1ère inégalité triangulaire

Soit $x \in [1,2]$. le max de $3|x|+4$ est $3\times2+4=10$ donc $\forall x \in [1,2]$, $f(x) \leq 10$.

ⓑ Soit $x \in [1,2]$
$2 \leq 2x \leq 4$ donc $1 \leq 2x-1 \leq 3$ donc $1 \leq |2x-1| = 2x-1 \leq 3$
et $4 \leq x+3 \leq 5$ donc $4 \leq |x+3| = x+3 \leq 5$

Lorsque $x \in [1,2]$, $f(x) = 2x-1+x+3 = 3x+2$

$1 \leq x \leq 2 \Rightarrow 3 \leq 3x \leq 6 \Rightarrow 5 \leq 3x+2 \leq 8$

le maximum de f est atteint en 2 et vaut 8. La majoration précédente était grossière.

④ ⓐ Soient $f_1 : x \mapsto \sin x - x$
$f_2 : x \mapsto 1-\frac{x^2}{2}-\cos x$
$f_3 : x \mapsto x-\frac{x^3}{6}-\sin x$
$f_4 : x \mapsto \cos x - 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24}$
$f_5 : x \mapsto \sin x - x + \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{120}$

toutes ces fonctions sont dérivables en tant que somme de fonctions dérivables

$f_1' : x \mapsto \cos x - 1$ $\quad f_1' \leq 0$
$f_2' : x \mapsto -x+\sin x$ $\quad f_2' = f_1$
$f_3' : x \mapsto 1-\frac{x^2}{2}-\cos x$ $\quad f_3' = f_2$
$f_4' : x \mapsto -\sin x + x - \frac{x^3}{6}$ $\quad f_4' = f_3$
$f_5' : x \mapsto \cos x - 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24}$ $\quad f_5' = f_4$

Sur $\mathbb{R}^+$, Comme $f_1' \leq 0$, f_1 décroit et $f_1(0)=0$ donc $f_1 \leq 0 \Rightarrow \forall x \geq 0$, $\sin x - x \leq 0$
Sur $\mathbb{R}^+$, Comme $f_2' \leq 0$, f_2 décroit et $f_2(0)=0$ donc $f_2 \leq 0 \Rightarrow \forall x \geq 0$ $1-\frac{x^2}{2} \leq \cos x$
Sur $\mathbb{R}^+$, Comme $f_3' \leq 0$, f_3 décroit et $f_3(0)=0$ donc $f_3 \leq 0 \Rightarrow \forall x \geq 0$ $x-\frac{x^3}{6} \leq \sin x$
Sur $\mathbb{R}^+$, Comme $f_4' \leq 0$, f_4 décroit et $f_4(0)=0$ donc $f_4 \leq 0 \Rightarrow \forall x \geq 0$ $\cos x \leq 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}$
Sur $\mathbb{R}^+$, Comme $f_5' \leq 0$, f_5 décroit et $f_5(0)=0$ donc $f_5 \leq 0 \Rightarrow \forall x \geq 0$ $\sin x \leq x - \frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}$

④ⓑ $\forall x \geq 0$ $x-\frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x$ donc $0{,}2-\frac{0{,}2^3}{6} \leq \sin 0{,}2 \leq 0{,}2$ donc $0{,}198 \leq \sin 0{,}2 \leq 0{,}2$

$\forall x \geq 0$ $1-\frac{x^2}{2} \leq \cos x \leq 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}$ donc $0{,}96 \leq \cos 0{,}2 \leq 0{,}96007$

④ⓒ Soit $x>0$ $x-\frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}$ donc $-x+\frac{x^3}{6}-\frac{x^5}{120} \leq -\sin x \leq -x+\frac{x^3}{6}$

donc $\frac{1}{6}-\frac{x^2}{120} \leq \frac{x-\sin x}{x^3} \leq \frac{1}{6}$ Par le th des gendarmes $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x-\sin x}{x^3} = \frac{1}{6}$

Ex 8 TD4

(1) Soit $x \in \mathbb{R}$ $\quad |x+1| \leq 4$ ssi $-4 \leq x+1 \leq 4$ ssi $-5 \leq x \leq 3$ $\qquad S = [-5,3]$

$|x+1| > 4$ ssi non $(-5 \leq x \leq 3)$ $\qquad S =]-\infty,-5[\cup]3,+\infty[$

$|2x-4| \leq |x-1|$ ssi $(2x-4)^2 \leq (x-1)^2$

ssi $4x^2+16-16x \leq x^2-2x+1$

ssi $3x^2-14x+15 \leq 0$

$\Delta = 14^2-4\times3\times15 = 16 \qquad 3x^2-14x+15=0$ ssi $x=\frac{5}{3}$ ou $x=3$

Donc $S = [\frac{5}{3},3]$

(2) Comme $t \in [0,1]$, $t^n \geq 0$ et $1+t \geq 0$ donc $\frac{t^n}{1+t} \geq 0$. De plus $\frac{1}{1+t} \leq 1$ donc $\frac{t^n}{1+t} \leq t^n$
Ainsi $0 \leq \frac{t^n}{1+t} \leq t^n$

(3) Soit $x \in [0,1]$. $\quad 0 \leq x \leq 1$ donc $0 \leq x^2 \leq 1$ donc $1 \leq 1+x^2 \leq 2$
et comme $x \mapsto \sqrt{x}$ est st^t croissante sur $\mathbb{R}^+$, $\sqrt{1} \leq \sqrt{1+x^2} \leq \sqrt{2}$

(4) Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $x \in [0,1]$. $\quad 0 \leq x \leq 1$ donc $e^0 \leq e^x \leq e^1$ puisque exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Ainsi $1 \leq e^x \leq e$ donc $1+1 \leq e^x+1 \leq e+1$ et $\frac{1}{e+1} \leq \frac{1}{e^x+1} \leq \frac{1}{2}$. De plus $e^{nx} > 0$ donc $\frac{e^{nx}}{e+1} \leq \frac{e^{nx}}{e^x+1} \leq \frac{e^{nx}}{2}$.

(5) Soit $f : x \mapsto x - \frac{x^2}{2} - \ln(1+x)$ et $g : x \mapsto \ln(1+x) - x$.
f et g sont dérivables sur $]-1,+\infty[$ en tant que somme de fonctions dérivables
$\forall x > -1$, $f'(x) = 1 - x - \frac{1}{1+x}$ et $g'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = \frac{1-1-x}{1+x} = \frac{-x}{1+x}$

x	-1		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$		↗	0	↘	

$g(0) = \ln(1) - 0 = 0$ donc $\forall x > -1$, $g(x) \leq 0$.

$\forall x > -1$, $f'(x) = \frac{1+x-x(1+x)-1}{1+x} = \frac{-x^2}{1+x} \leq 0$

x	-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	0	↘	

$\lim\limits_{x\to0} x - \frac{x^2}{2} - \ln(1+x) = 0$ donc $\forall x > -1$, $f(x) \leq 0$.

Concl: $\forall x > -1$, $x - \frac{x^2}{2} - \ln(1+x) \leq 0$ et $\ln(1+x) - x \leq 0$

$\forall x > -1$, $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$

(6) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ Soit $k \in [\![1,n]\!]$ $\qquad \frac{1}{k2^k} \leq \frac{1}{2^k}$ puisque $2^k \leq k2^k$

donc $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k2^k} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}$ or $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} = \sum_{k=1}^{n} (\frac{1}{2})^k = \frac{\frac{1}{2} - (\frac{1}{2})^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{(\frac{1}{2})}\left[\frac{1}{2} - (\frac{1}{2})^{n+1}\right]$

donc $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} = 2\left[\frac{1}{2} - (\frac{1}{2})^{n+1}\right] = 1 - (\frac{1}{2})^n \leq 1$ puisque $(\frac{1}{2})^n \geq 0$.

Donc $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k2^k} \leq 1$