# TD 4 : Fonctions : généralités

▶ Exercice 1 : Soit $f : x \mapsto x^2 + \ln x$.

1. Montrer que $f$ est bijective de $\mathbb{R}_*^+$ vers un intervalle que l'on précisera. On note $f^{-1}$ sa bijection réciproque.
2. Montrer que $f^{-1}$ est dérivable sur son ensemble de définition. Exprimer $\left(f^{-1}\right)'$ en fonction de $f^{-1}$.

▶ Exercice 2 : Soit $f : x \mapsto \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$.

1. Donner l'ensemble de définition de $f$.
2. Donner le domaine de dérivabilité de $f$.
3. Soit $x$ un élément appartenant au domaine de dérivabilité de $f$. Calculer $f'(x)$.

▶ Exercice 3 : Soit $f : x \mapsto x - \sin x$.

1. Etudier et représenter graphiquement la fonction $f$. On montrera que l'on peut restreindre le domaine d'étude à $[0, \pi]$ en étudiant la parité de $f$ et en exprimant $f(x + 2\pi)$ en fonction de $f(x)$ pour tout $x$ appartenant à $\mathbb{R}$.
2. Montrer que pour tout $x$ appartenant à $\mathbb{R}$, $x-1 \leq f(x) \leq x+1$. Interpréter géométriquement cet encadrement.
3. Résoudre $f(x) = x - 1$ et $f(x) = x + 1$.
4. Donner une équation des tangentes à la courbe aux points dont les abscisses sont solutions des équations $f(x) = x - 1$ et $f(x) = x + 1$.
5. Traduire géométriquement la question précédente.

▶ Exercice 4 : Soit $f : x \mapsto \dfrac{x^2}{x-1}$. On note $\mathcal{C}_f$ sa représentation graphique.

1. Montrer que $\Omega(1, 2)$ est centre de symétrie de $\mathcal{C}_f$. En déduire une réduction du domaine d'étude.
2. Etudier et représenter graphiquement $f$.

▶ Exercice 5 :

1. Comparer les fonctions $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^4+1}$ et $g : x \mapsto \dfrac{1}{x^2+1}$.
2. Soit $f : x \mapsto x + \dfrac{1}{x}$. Préciser si $f$ est majorée, minorée, bornée ou non sur les intervalles $\left[\dfrac{1}{2}, 3\right]$, $[1, +\infty]$ et $]0, 1]$.
3. Soit $f : x \mapsto |2x - 1| + |x + 3|$.
   (a) A l'aide d'une inégalité triangulaire, montrer que pour tout $x$ réel, $|f(x) \leq 3|x| + 4$ puis que pour tout $x$ appartenant à $[1, 2]$, $f(x) \leq 10$.
   (b) Expliciter $f(x)$ lorsque $x \in [1, 2]$. En déduire le maximum de $f$ sur $[1, 2]$ et comparer avec le résultat obtenu à la question précédente.
4. (a) Démontrer pour $x \geq 0$ chacune des inégalités :
      i. $\sin x \leq x$,
      ii. $1 - \dfrac{x^2}{2} \leq \cos x$,

iii. $x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x$,

iv. $\cos x \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$,

v. $\sin x \leq x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$.

(b) Déterminer un encadrement de $\sin 0,2$ et de $\cos 0,2$.

(c) Etudier la limite en 0 de $\frac{x - \sin x}{x^3}$.

► Exercice 6 :

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que $\left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ : $\left\lfloor \sqrt{x^2+1} \right\rfloor = 2$.

► Exercice 7 :

1. Déterminer les dérivées successives de $x \mapsto x^5 - 2x^4 + x^2 - x + 3$, $x \mapsto \frac{1}{x-3}$, $x \mapsto \cos x$ et $x \mapsto \sin(2x)$.
2. On considère la fonction $f \ : \ x \mapsto \sin^2 x$. Etablir une relation entre les fonctions $f$ et $f''$.

► Exercice 8 :

1. Résoudre les inéquations $|x+1| \leq 4$, $|x+1| > 4$ et $|2x-4| \leq |x-1|$.
2. Montrer que pour tout $t \in [0,1]$, $0 \leq \frac{t^n}{1+t} \leq t^n$.
3. Montrer que pour tout $x \in [0,1]$, $1 \leq \sqrt{1+x^2} \leq \sqrt{2}$.
4. Montrer que pour tout $x \in [0,1]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{e^{nx}}{e+1} \leq \frac{e^{nx}}{e^x+1} \leq \frac{1}{2}e^{nx}$.
5. Montrer que pour tout $x \in ]-1,+\infty[$, $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$.
6. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k2^k} \leq 1$.

► Exercice 9 : Soient $a$ et $b$ deux réels tels que $(a,b) \neq (0,0)$. On note $\alpha = a + ib$ et on note $f$ la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{ax}e^{ib}$.

1. Déterminer les fonctions $Ref$, $Imf$, $|f|$ et $\bar{f}$.
2. Montrer que $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer $f'$.
3. Montrer que pour tout $k$ entier naturel non nul, $f$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $\mathbb{R}$ et déterminer $f^{(k)}$.
4. Reprendre les questions précédentes avec la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{ax}e^{ibx}$.