Chapitre 4 : Généralités sur les fonctions

1 Inégalités dans $\mathbb{R}$

1.1 Relation d'ordre sur $\mathbb{R}$

Une relation d'ordre sert à formaliser la notion de comparaison, de classement, d'ordonnement.

Définition 1 (Relation d'ordre).

Sur $\mathbb{R}$, la relation $\leq$ a les qualités suivantes :

- *elle est **réflexive** : $\forall x \in \mathbb{R},\ x \leq x$ (alors que ce n'est pas le cas pour $<$),*
- *elle est **antisymétrique** : $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ x \leq y$ et $y \leq x \Rightarrow x = y$ (alors que ce n'est pas le cas de la relation / dans $\mathbb{Z}$)*
- *elle est **transitive** : $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ \forall z \in \mathbb{R},\ x \leq y$ et $y \leq z \Rightarrow x \leq z$ ($<$ vérife aussi cela mais pas la relation $\mathcal{R}$ définie par $y\mathcal{R}x \Leftrightarrow y = f(x)$ en général).*

On dit que $\leq$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{R}$ et que le couple $(\mathbb{R}, \leq)$ est un ensemble ordonné.
De plus, lorsque l'on prend deux éléments quelconques de $\mathbb{R}$, x et y, on peut toujours les comparer, c'est-à-dire qu'au moins l'une des propositions $x \leq y$ ou $y \leq x$ est vraie. On dit que l'ordre induit par $\leq$ sur $\mathbb{R}$ est total.

Propriété 1 (Compatibilité avec les opérations).

1. *$\leq$ est compatible avec les opérations $+$ et $\times$:*

$$\forall a, b, c \in \mathbb{R}, \quad a \leqslant b \Rightarrow a + c \leqslant b + c$$

$$\forall a, b \in \mathbb{R} \text{ et } \forall c \in \mathbb{R} \text{ tel que } c \geqslant 0, \quad a \leqslant b \Rightarrow ac \leqslant bc.$$

$$\forall a, b \in \mathbb{R} \text{ et } \forall c \in \mathbb{R} \text{ tel que } c \leqslant 0, \quad a \leqslant b \Rightarrow ac \geqslant bc.$$

$$\forall a, b \in \mathbb{R},\ 0 < a < b \Rightarrow 0 < \frac{1}{b} < \frac{1}{a}.$$

$$\forall a, b \in \mathbb{R},\ a < b < 0 \Rightarrow \frac{1}{b} < \frac{1}{a} < 0.$$

▶ Exemple : Soient x et y deux réels strictement positifs tels que $x \leq y$. On pose $m = \dfrac{x+y}{2}$, $g = \sqrt{xy}$ et $h = \dfrac{2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}$.
Montrer que $x \leq h \leq g \leq m \leq y$.

1.2 Intervalles de $\mathbb{R}$

Définition 2 (Intervalles de $\mathbb{R}$).

Les intervalles de $\mathbb{R}$ autres que $\mathbb{R}$ sont les parties de $\mathbb{R}$ de la forme :

$[a,b] = \{x \in \mathbb{R},\ a \leq x \leq b\}$ *avec a et b deux réels. Si $a \leq b$, l'intervalle $[a,b]$ s'appelle* ***segment d'extrémités*** *a* ***et*** *b.*

$]a,b[= \{x \in \mathbb{R},\ a < x < b\}$ *avec a et b deux réels. Si $a \leq b$, l'intervalle $]a,b[$ s'appelle* ***intervalle ouvert d'extrémités*** *a* ***et*** *b.*

$]a,b] = \{x \in \mathbb{R},\ a < x \leq b\}$ *avec a et b deux réels. Si $a \leq b$, l'intervalle $]a,b]$ s'appelle* ***intervalle semi-ouvert*** *ou* ***intervalle semi-fermé****.*

$[a,b[= \{x \in \mathbb{R},\ a \leq x < b\}$ *avec a et b deux réels. Si $a \leq b$, l'intervalle $[a,b[$ s'appelle* ***intervalle semi-ouvert*** *ou* ***intervalle semi-fermé****.*

$[a,+\infty[= \{x \in \mathbb{R},\ a \leq x\}$ *avec a et b deux réels. Cet intervalle s'appelle* ***demi-droite fermée****.*

$]a,+\infty[= \{x \in \mathbb{R},\ a < x\}$ *avec a et b deux réels. Cet intervalle s'appelle* ***demi-droite ouverte****.*

$]-\infty,b] = \{x \in \mathbb{R},\ x \leq b\}$ *avec a et b deux réels. Cet intervalle s'appelle* ***demi-droite fermée****.*

$]-\infty,b[= \{x \in \mathbb{R},\ x < b\}$ *avec a et b deux réels. Cet intervalle s'appelle* ***demi-droite ouverte****.*

Remarque 1. *L'ensemble vide est un intervalle : $\emptyset =]a,a[$.*
Par convention, si $a > b$, on note aussi $[a,b]$ le segment d'extrémité a et b, c'est-à-dire $[b,a]$.

Propriété 2.

Les intervalles de $\mathbb{R}$ sont les parties ***convexes****, c'est-à-dire les parties I de $\mathbb{R}$ telles que*

$$\forall x \in I,\ \forall y \in I,\ [x,y] \subset I.$$

$\mathbb{Q}$ n'est pas un intervalle de $\mathbb{R}$.

1.3 Valeur absolue

Définition 3 (Valeur absolue).

On définit la ***valeur absolue*** *d'une réel x par :*

$$|x| = max(x,-x) = \begin{cases} x \text{ si } x \geq 0 \\ -x \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

Propriété 3.

Etant donnés deux réels x et y quelconques et un réel h strictement positif, on a

1. $|x| \geq 0$
2. $|x| = \sqrt{x^2}$
3. $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
4. $|y-x| \leq h \Leftrightarrow x - h \leq y \leq x + h$
5. $|xy| = |x||y|$

▶ Exemple : Interpéter sur la droite réelle l'inégalité $|x-a| \leq b$.

Définition 4 (Distance de deux réels).

On appelle ***distance de deux réels*** *x* ***et*** *y la valeur absolue de leur différence :*

$$d(x,y) = |x-y|$$

1.4 Inégalités triangulaires

Propriété 4 (Inégalité triangulaire).

Etant donnés deux réels x et y quelconques, on a :

$$|x+y| \leq |x| + |y|.$$

Propriété 5 (Corollaire).

Etant donnés deux réels x et y quelconques, on a :

$$||x| - |y|| \leq |x-y|.$$

Propriété 6 (Corollaire).

Soit $d : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+,\ (x,y) \mapsto d(x,y)$. L'application d vérifie :
$\forall x, y \in \mathbb{R},\ d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ *(séparation)*
$\forall x, y \in \mathbb{R},\ d(x,y) = d(y,x)$ *(symétrie)*
$\forall x, y, z \in \mathbb{R},\ d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ *(inégalité triangulaire) On dit que d est une distance sur $\mathbb{R}$.*

▶ Exemple : Lorsque x décrit $[-1,2]$, que décrivent $|1-x|$? $|1+x|$? $1+|x|$?
▶ Exemple : Montrer que pour $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, $|x+y+z| \leq |x| + |y| + |z|$ et $|x-y| + |x+y| \geq |x| + |y|$.

1.5 Eléments remarquables

Définition 5.

Soit A une partie de $\mathbb{R}$. On définit :
- *un **majorant** de A : $M \in \mathbb{R}$. M est un majorant de A signifie que $\forall a \in \mathbb{R},\ (a \in A \Rightarrow a \leq M)$. Une partie admettant un majorant est dite majorée. Pas d'unicité du majorant.*
- *un **minorant** de A : $m \in E$. m est un minorant de A signifie que $\forall a \in \mathbb{R},\ (a \in A \Rightarrow m \leq a)$. Une partie admettant un minorant est dite minorée. Pas d'unicité du minorant.*
- *le **plus grand élément de A ou maximum de** A : lorsqu'il existe, le plus grand élément de A est un majorant de A qui appartient à A. On le note $max(A)$. $max(A) \in A$ et $\forall a \in \mathbb{R},\ a \in A \Rightarrow a \leq max(A)$. Quand il existe le plus grand élément est unique et se note $max(A)$.*
- *le **plus petit élément de A ou minimum de** A : lorsqu'il existe, le plus petit élément de A est un minorant de A qui appartient à A. On le note $min(A)$. $min(A) \in A$ et $\forall a \in \mathbb{R},\ a \in A \Rightarrow min(A) \leq a$. Quand il existe le plus petit élément est unique et se note $min(A)$.*

Remarque 2. *Soit A une partie de $\mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. On dit que α est un **extremum** de A si α est un maximum ou un minimum de A.*

▶ Exemples : :
1. $\max([0,2]) =$
2. $\max(\{\sin(t), t \in \mathbb{R}\}) =$
3. $\max(]0,1[) =$

Remarque 3. *Soit A une partie de $\mathbb{R}$. De nombreux cas de figure sont possibles : A peut n'admettre aucun minorant et aucun majorant ($A = \mathbb{R}$) ; A peut aussi ne pas admettre de maximum ni de minimum mais admettre un majorant et un minorant ($A =]0,1[$).*

Définition 6 (Partie minorée, partie majorée, partie bornée).

Soit A une partie de $\mathbb{R}$.

— *On dit que A est une partie minorée de $\mathbb{R}$ lorsque A possède au moins un minorant dans $\mathbb{R}$, c'est-à-dire :*

$$\exists m \in \mathbb{R}, \forall x \in A,\ m \leq x.$$

— *On dit que A est une partie majorée de $\mathbb{R}$ lorsque A possède au moins un majorant dans $\mathbb{R}$, c'est-à-dire :*

$$\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in A,\ x \leq M.$$

— *On dit que A est une partie bornée de $\mathbb{R}$ lorsque A est minorée et majorée.*

1.6 Partie entière

Définition 7 (Partie entière).

*Si x est un réel, l'unique entier relatif n vérifiant $n \leq x < n+1$ s'appelle la **partie entière** de x et se note $\lfloor x \rfloor$.*

► Exemple : Calculer pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor - \lfloor x+y \rfloor$.
► Exemple : Etudier et représenter la fonction $f\ :\ x \mapsto x - \lfloor x \rfloor$.

2 Généralités sur les fonctions

Les fonctions à valeurs réelles sont appelées fonctions numériques.
Dans toute cette section, E désigne une partie de $\mathbb{R}$.

Définition 8 (Fonction).

*Soit F une partie de $\mathbb{R}$. On appelle fonction de E dans F (ou fonction de E vers F) toute relation qui, à **chaque** élément x de E, associe **au plus un** élément y de F. E est l'ensemble de départ et F est l'ensemble d'arrivée. Si la fonction est notée f, on écrit $f\ :\ E \to F,\ x \mapsto y$.*
On dit que x est un antécédent de y et que y est l'image de x par f.
On note F^E ou $\mathcal{F}(E,F)$ l'ensemble des fonctions de E dans F.

En particulier, lorsque $F = \mathbb{R}$, on note $\mathbb{R}^E$ ou $\mathcal{F}(E,\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de E dans $\mathbb{R}$.

2.1 Ensemble de définition

L'ensemble de définition d'une fonction f de E dans $\mathbb{R}$ est l'ensemble des x qui ont effectivement une image par f, c'est-à-dire tels que $f(x)$ existe. On le note

$$\mathcal{D}_f = \{x \in E \mid \exists y \in F, y = f(x)\}.$$

On a $\mathcal{D}_f \subset E$.

► Exemple : Trouver l'ensemble de définition de $f\ : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}-1}$.

2.2 Opérations sur les fonctions

On munit $\mathcal{F}(E,\mathbb{R})$ de deux opérations internes (ou lois de composition interne) $+$ et $\times$ et d'une multiplication externe $.$, définies comme suit :
$\forall f,g \in \mathcal{F}(E,\mathbb{R}),\ f+g\ :\ E \to \mathbb{R},\ x \mapsto (f+g)(x) = f(x)+g(x)$.
$\forall f,g \in \mathcal{F}(E,\mathbb{R}),\ f \times g\ :\ E \to \mathbb{R},\ x \mapsto (f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$. L'application $f \times g$ se note aussi fg.
$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall f \in \mathcal{F}(E,\mathbb{R}),\ \lambda.f\ :\ E \to \mathbb{R},\ x \mapsto (\lambda.f)(x) = \lambda \times f(x)$. L'application $\lambda.f$ se note aussi λf.
$\forall f \in \mathcal{F}(E,\mathbb{R}), \forall g \in \mathcal{F}(E,\mathbb{R}^*),\ \dfrac{f}{g}\ :\ E \to \mathbb{R},\ x \mapsto \dfrac{f}{g}(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$.

Soient enfin f une fonction appartenant à $\mathcal{F}(E,F)$ et g une fonction appartenant à $\mathcal{F}(G,\mathbb{R})$, avec $E,\ F$ et G trois parties de $\mathbb{R}$ et $F \subset G$. On note $g \circ f$ la fonction **composée de f par g** (et on dit g rond f). Cette notation où g précède f s'explique par la relation : $\forall x \in E,\ (g \circ f)(x) = g(f(x))$.

Remarque 4. *Pour que la fonction $g \circ f$ soit définie, il faut d'abord que f le soit. L'ensemble de définition de $g \circ f$ est donc inclus dans l'ensemble de définition de f.*

2.3 Représentation graphique

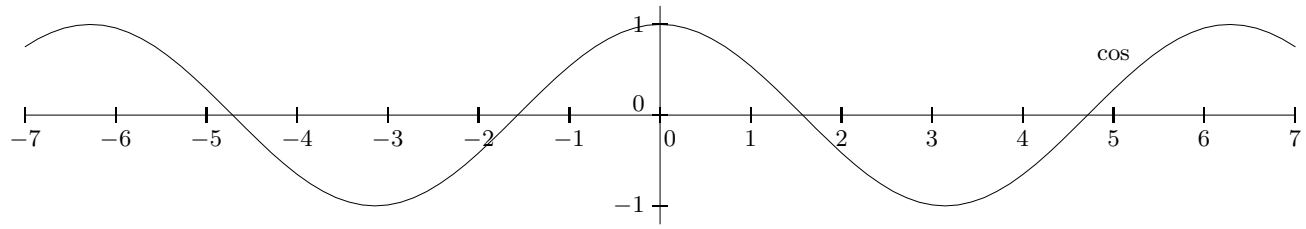
Définition 9 (Représentation graphique d'une fonction).

Soit $f \in \mathcal{F}(E,\mathbb{R})$. On appelle représentation graphique de f sur E, ou courbe représentative de f sur E, l'ensemble des points $M(x,y)$ tels que $x \in E$ et $y = f(x)$.

▶ Exemple : On peut lire sur la figure suivante la représentation graphique de la fonction $f\ x \mapsto \cos x$.

1. Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = \dfrac{1}{2}$ et $f(x) \leq \dfrac{1}{2}$.
2. Tracer la représentation graphique des fonctions $x \mapsto -x$, $x \mapsto |x|$, $f_1 : x \mapsto f(x) + a$, $f_2 : x \mapsto f(x+a)$, $f_3 : x \mapsto -f(x)$, $f_4 : x \mapsto f(-x)$, $f_5 : x \mapsto |f(x)|$, $f_6 : x \mapsto f(ax)$, $f_7 : x \mapsto af(x)$ et $f_8 : x \mapsto f(a-x)$, avec $a = 2$. On appelle ces fonctions : fonctions associées à f.

.



.

2.4 Parité, imparité, périodicité

Définition 10 (Fonction périodique).

Soient $f \in \mathcal{F}(E, \mathbb{R})$ et $T \in \mathbb{R}$.
*f est **périodique de période** T ou T-périodique ssi $\forall x \in E, \begin{cases} (x+T) \in E \\ f(x+T) = f(x) \end{cases}$*

► Exemple : Traduire géométriquement cette définition.

Propriété 7.

Toute somme de deux fonctions périodiques de période T est une fonction périodique de période T.
Tout produit de deux fonctions périodiques de période T est une fonction périodique de période T.
Tout produit par un scalaire d'une fonction périodique de période T est une fonction périodique de période T.
Tout inverse d'une fonction périodique de période T qui ne s'annulle pas sur son ensemble de définition est une fonction périodique de période T.

Remarque 5. *Si f est périodique de période T, T n'est pas la seule période de f. Par exemple $2T$ est aussi une période de f.*
Dès qu'une fonction périodique de période $T > 0$ est connue sur un intervalle de longueur T, elle est connue partout.

► Exemple : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \sin x$. L'ensemble des périodes strictement positives de f est $\{2\pi k, k \in \mathbb{N}^*\}$. Cet ensemble possède un plus petit élément 2π, appelé période minimale de f.

Propriété 8.

Soient $f : E \to \mathbb{R}$ et $g : F \to \mathbb{R}$ tel que $f(E) \subset F$ et f est T-périodique sur E. Alors $g \circ f$ est T-périodique sur E.

Définition 11 (Fonction paire, impaire).

Soit $f \in \mathcal{F}(E, \mathbb{R})$ et E tel que $\forall x \in E, -x \in E$, c'est-à-dire que E est symétrique par rapport à 0.
*f est **paire** ssi $\forall x \in E,\ f(x) = f(-x)$.*
*f est **impaire** ssi $\forall x \in E,\ f(x) = -f(-x)$.*

► Exemple : Traduire géométriquement cette définition.

► Exemple : Les fonctions constantes, et les fonctions $x \mapsto x^2$, $x \mapsto x^4$, $x \mapsto x^2 - \dfrac{1}{x^2}$, $x \mapsto |x| - 1$ et $x \mapsto \cos(x)$

sont des fonctions paires. Les fonctions $x \mapsto x$, $x \mapsto x^3$, $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ et $x \mapsto \sin x$ sont des fonctions impaires. $x \mapsto \exp x$ n'est ni paire, ni impaire.

Remarque 6. *Dès qu'une fonction est paire ou impaire, on peut limiter son étude à la partie "positive" de f (ensemble des réels x de l'ensemble de définition tels que $x \geq 0$. Un symétrie convenable achèvera le travail.*

Propriété 9.

On note $\mathcal{P}(E,\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de E dans $\mathbb{R}$ qui sont paires. $\mathcal{P}(E,\mathbb{R})$ est stable par somme, par produit par un scalaire et par produit (interne). On note $\mathcal{I}(E,\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de E dans $\mathbb{R}$ qui sont impaires. L'application constante égale à 1 n'appartient pas à $(\mathcal{I}(E,\mathbb{R})$ mais $(\mathcal{I}(E,\mathbb{R}),+,.)$. $\mathcal{I}(E,\mathbb{R})$ est stable par somme et par produit par un scalaire mais pas par produit.

On a donc que le produit de deux applications paires est une application paire. On a de plus que le produit de deux applications impaires est une application paire et que le produit d'une application paire avec une application impaire est une application impaire.

Propriété 10.

Toute fonction de E dans $\mathbb{R}$ se décompose de manière unique en la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

Démonstration par analyse-synthèse ; $\forall x \in E,\ p(x) = \dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$ et $i(x) = \dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$.

Propriété 11 (Composée d'applications et parité).

Soient f et g deux applications de E vers $\mathbb{R}$ telles que l'application composée $g \circ f$ existe. Alors,
si f et g sont paires, $g \circ f$ est paire,
si f et g sont impaires, $g \circ f$ est impaire,
si f et g sont l'une paire et l'autre impaire, $g \circ f$ est paire.

Définition 12 (Fonction positive, négative).

Soit $f \in \mathcal{F}(E,\mathbb{R})$.
*f est **positive** ssi $\forall x \in E,\ f(x) \geq 0$.*
*f est **négative** ssi $\forall x \in E,\ f(x) \leq 0$.*

Propriété 12.

Toute fonction de E dans $\mathbb{R}$ se décompose de manière unique en la somme d'une fonction positive et d'une fonction négative.

Démonstration par analyse-synthèse ; $\forall x \in E,\ f^+(x) = \sup(0, f(x)) = \dfrac{f(x)+|f(x)|}{2}$ et $f^-(x) = \inf(0, f(x)) = \dfrac{f(x)-|f(x)|}{2}$

2.5 Fonctions bornées

Définition 13 (Fonctions majorées, minorées. Fonctions bornées).

Soit $f \in \mathcal{F}(E,\mathbb{R})$.
*f est dite **majorée** si $\exists M \in \mathbb{R},\ \forall x \in E, f(x) \leq M$.*
*f est dite **minorée** si $\exists m \in \mathbb{R},\ \forall x \in E, f(x) \geq m$.*
*f est dite **bornée** si elle est à la fois majorée et minorée.*

► Exemple : Traduire géométriquement ces propriétés.

Remarque 7. *f est dite **bornée** ssi elle est à la fois majorée et minorée donc f est bornée ssi $\exists m, M \in \mathbb{R}$, $\forall x \in E, m \leq f(x) \leq M$ ssi $\exists m, M \in \mathbb{R},\ f(E) \subset [m, M]$ ssi $f(E)$ est bornée, où $f(E) = \{f(x) | x \in E\}$.*

Propriété 13.

f est bornée ssi $|f|$ est bornée ssi $|f|$ est majorée.

Définition 14 (Extremum).

Soit $f \in \mathcal{F}(E, \mathbb{R})$.

- *f présente un **maximum global** en $a \in E$ lorsque $\forall x \in E \quad f(x) \leqslant f(a)$, on note alors $f(a) = \max_E f$*
- *f présente un **minimum global** en $a \in E$ lorsque $\forall x \in E \quad f(x) \geqslant f(a)$, on note alors $f(a) = \min_E f$*
- *Lorsque f présente un minimum ou un maximum global en $a \in E$, on dit que f présente un **extremum global** en a.*

Si f présente un minimum global alors f est minorée. Réciproque fausse.

► Exemple : Soit $f : x \mapsto x + \dfrac{1}{x}$. f admet un minimum en 1 et cette valeur minimale pour f est égale à 2.

2.6 Fonctions monotones

Définition 15.

Soit $f \in \mathcal{F}(E, \mathbb{R})$.
*f est **croissante** sur E ssi $\forall (x, x') \in E^2,\ x \leq x' \Rightarrow f(x) \leq f(x')$.*
*f est **strictement croissante** sur E ssi $\forall (x, x') \in E^2,\ x < x' \Rightarrow f(x) < f(x')$.*
*f est **décroissante** sur E ssi $\forall (x, x') \in E^2,\ x \leq x' \Rightarrow f(x) \geq f(x')$.*
*f est **strictement décroissante** sur E ssi $\forall (x, x') \in E^2,\ x < x' \Rightarrow f(x) > f(x')$.*
*f est **monotone** sur E ssi f est croissante ou déccroissante sur E. f est **strictement monotone** sur E ssi f est strictement croissante ou strictement déccroissante sur E.*

Remarque 8. *Attendre le chapitre 5 : une fonction monotone est strictement monotone ssi elle est injective.*

Propriété 14.

Soient $f, g \in \mathcal{F}(E, \mathbb{R})$.

1. *Si f et g sont croissantes alors $(f + g)$ est croissante.*
2. *Si f et g sont décroissantes alors $(f + g)$ est décroissante.*
3. *Si f est croissante alors $(-f)$ est décroissante et réciproquement.*
4. *Si f est croissante et $\alpha > 0$ alors (αf) est croissante.*
5. *Si f est croissante et $\alpha < 0$ alors (αf) est décroissante.*
6. *Si f est décroissante et $\alpha > 0$ alors (αf) est décroissante.*
7. *Si f est décroissante et $\alpha < 0$ alors (αf) est croissante.*
8. *Si f et g sont croissantes,*
   (a) *si $f \geq 0$ et $g \geq 0$, alors fg est croissante et positive.*
   (b) *si $f \leq 0$ et $g \leq 0$, alors fg est décroissante et positive.*
9. *Si f et g sont décroissantes,*
   (a) *si $f \geq 0$ et $g \geq 0$, alors fg est décroissante et positive.*
   (b) *si $f \leq 0$ et $g \leq 0$, alors fg est croissante et positive.*
10. *Si f est croissante et g décroissante,*
    (a) *si $f \geq 0$ et $g \leq 0$, alors fg est décroissante et négative.*
    (b) *si $f \leq 0$ et $g \geq 0$, alors fg est croissante et négative.*
11. *Si f ne s'annulle pas sur E, $\dfrac{1}{f} \in \mathcal{F}(E, \mathbb{R})$. Si f est croissante et garde un signe constant, $\dfrac{1}{f}$ est décroissante.*

Concernant le dernier point, la condition f garde un signe constant est indispensable : penser à $f = id_{\mathbb{R}^*}$.

Propriété 15.

Soient $f : E \to \mathbb{R}$ et $g : F \to \mathbb{R}$ tel que $f(E) \subset F$.

1. *si f est croissante et g croissante alors $g \circ f$ aussi.*
2. *si f est croissante et g décroissante ou vice et versa alors $g \circ f$ est décroissante.*
3. *si f est décroissante et g décroissante alors $g \circ f$ est croissante.*

2.7 Fonction réciproque d'une bijection

Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ et $f : I \to J$.

Définition 16 (Bijection).

Dire que $f : I \to J$ est une bijection signifie : "'pour tout y de J, l'équation $f(x) = y$ a une unique solution dans I"', ce que l'on note formellement :
$\forall y \in J,\ \exists! x \in I,\ y = f(x)$.

Définition 17 (Bijection réciproque).

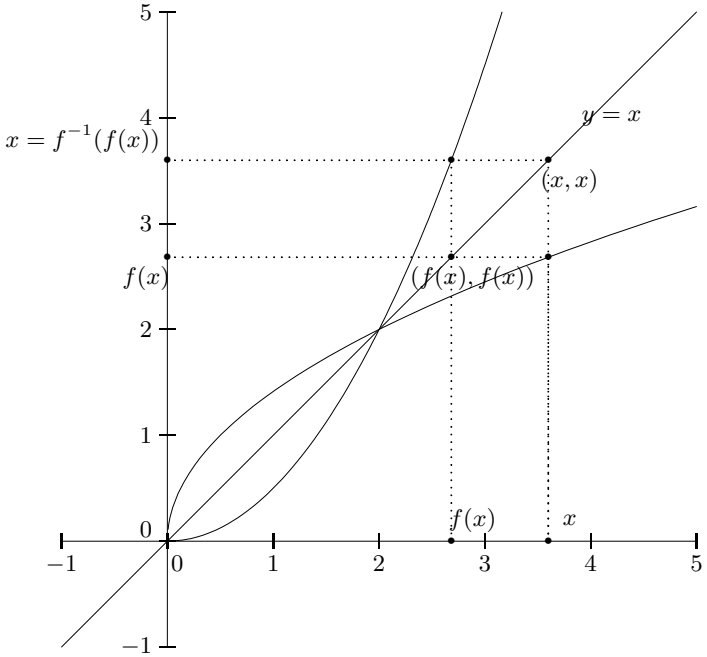
Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ et $f : I \to J$ une bijection.
On note f^{-1} l'application définie de J dans I, qui à y, élément de J, associe la solution de l'équation $f(x) = y$.
f^{-1} est bijective de J sur I.
$(y = f(x)$ et $x \in I) \Leftrightarrow (x = f^{-1}(y)$ et $y \in J)$. On dit alors que f^{-1} est la bijection réciproque de f (elle est unique).

Remarque 9.

On définit $Id_I : I \to I,\ x \mapsto x$ et $Id_J : J \to J,\ y \mapsto y$. $f \circ f^{-1} = Id_J$ et $f^{-1} \circ f = Id_I$.

Il ne faut pas confondre la fonction réciproque f^{-1} , avec la fonction inverse $\dfrac{1}{f}$.

Du point de vue graphique, les représentations de deux fonctions réciproques se déduisent l'un de l'autre par une symétrie par rapport à la première bissectrice. En effet, soient f et g deux fonctions réciproques l'une de l'autre, et soient $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ les courbes représentatives de f et de g respectivement. Soit $M(x, f(x))$ appartenant à $\mathcal{C}_f$. Soit M' le symétrique de M par rapport à la première bissectrice alors $M'(f(x), x) \Rightarrow M'(f(x), g \circ f(x)) \Rightarrow M'(f(x), g(f(x)))$ donc $M' \in \mathcal{C}_g$. Réciproquement, on montre de façon analogue que si $N \in \mathcal{C}_g$ alors le symétrique de N appartient à $\mathcal{C}_f$.



▶ Exemple : Les transformations du plan sont les applications bijectives du plan. Quelles sont leurs réciproques ? La transformation réciproque :

— d'une translation de vecteur $\vec{k}$ est une translation de vecteur $-\vec{k}$

— d'une symétrie de centre O ou d'axe (d) est elle-même (on parle alors d'involution)

— d'une homothétie de centre C et de rapport k est une homothétie de centre C et de rapport $\dfrac{1}{k}$

— d'une rotation de centre C et d'angle θ est une rotation de centre C et d'angle $-\theta$

Propriété 16 (Théorème de la bijection).

Toute fonction continue strictement monotone sur un intervalle I réalise une bijection de I sur $f(I) = J$ et que J est aussi un intervalle. Cela signifie qu'une telle fonction est une bijection et possède une bijection réciproque définie sur J à valeurs dans I.

Remarque 10.

Cette propriété a été étudiée en Terminale pour tous les cas de figure concernant la nature de I : intervalle fermé, ouvert, semi ouvert, borné ou non.

Elle permet la création de nouvelles fonctions définies comme application réciproque de fonctions usuelles.

Elle se distingue du théorème des valeurs intérmédiaires (unicité).

▶ Exemple : La fonction sinus est une bijection strictement crosisante de $[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}]$ sur $[-1, 1]$: elle admet donc une fonction réciproque que l'on note arcsin (''Arcsinus''). La fonction arcsin associe à tout réel x de $[-1, 1]$ l'unique réel de $[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}]$ dont le sinus est x. Ainsi $\arcsin 1 = \dfrac{\pi}{2}$; $\arcsin 0 = 0$; $\arcsin \dfrac{\sqrt{2}}{2} = ... ; ... = \dfrac{\pi}{6}$. Mais $\arcsin \pi$ n'existe pas.

▶ Méthode : Pour montrer qu'une fonction est une bijection de I sur J, dresser le tableau de variation de la fonction, évoquer sa continuité et sa stricte monotonie puis conclure que f réalise une bijection de I sur $f(I) = J$. Huit cas se présentent selon la monotonie de f et la nature de I : si f est croissante :

— si $I = [a, b]$, f réalise une bijection de $[a, b]$ sur $[f(a), f(b)]$,

— si $I = [a, b[$, f réalise une bijection de $[a, b[$ sur $[f(a), \lim\limits_{b} f[$,

— si $I =]a, b]$, f réalise une bijection de $]a, b]$ sur $]\lim\limits_{a} f, f(b)]$,

— si $I =]a, b[$, f réalise une bijection de $]a, b[$ sur $]\lim\limits_{a} f, \lim\limits_{b} f[$.

et si f est décroissante :

— si $I = [a, b]$, f réalise une bijection de $[a, b]$ sur $[f(b), f(a)]$,
— si $I = [a, b[$, f réalise une bijection de $[a, b[$ sur $]\lim_b f, f(a)]$,
— si $I =]a, b]$, f réalise une bijection de $]a, b]$ sur $[f(b), \lim_a f[$,
— si $I =]a, b[$, f réalise une bijection de $]a, b[$ sur $]\lim_b f, \lim_a f[$,

où $a < b$ et $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

Propriété 17 (Continuité de f^{-1}).

*Si f est une application **continue** et strictement monotone sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, alors f réalise une bijection de I sur l'intervalle $J = f(I)$ et sa réciproque est continue de J dans I.*

3 Dérivation

3.1 Tangente en un point

Définition 18.

Soit f une fonction définie sur un intervalle I, x_0 un point de I où f est dérivable. On appelle tangente à la courbe représentative de f au point $M_0(x_0, f(x_0))$ la droite passant par le point M_0 et de coefficient directeur égal à $f'(x_0)$.
La tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point $M_0(x_0, f(x_0))$ a donc pour équation

$$y - f(x_0) = f'(x_0) \times (x - x_0).$$

Vitesse instantanée Lorsque $f(t)$ est l'abscisse à l'instant t d'un point en mouvement rectiligne, pour $t \neq t_0$ le taux d'accroissement $\dfrac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$ représente la **vitesse moyenne** entre les instants t et t_0 et $f'(t_0)$ représente la **vitesse instantanée** à l'instant t_0.
En cinétique chimique, la dérivée de la concentration d'un produit s'appelle vitesse d'apparition de ce produit.
Lorsque f représente l'évolution de la charge d'une armature de condensateur, sa dérivée représente l'intensité du courant de charge ou de décharge du condensateur.

3.2 Dérivation et opérations

On note $\mathcal{D}(]a, b[, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions dérivables sur $]a, b[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Lemme 1. *Toute fonction dérivable en un point est continue en ce point.*

Théorème 1.

Soient f et g dérivables sur $]a, b[$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, $f + g$, αf et fg sont dérivables sur $]a, b[$ et
$(f + g)' = f' + g'$
$(\alpha f)' = \alpha f'$
$(fg)' = f'g + fg'$

Remarque 11. *$D : \mathcal{D}(]a, b[, \mathbb{R}) \to \mathcal{F}(]a, b[, \mathbb{R}),\ f \mapsto f'$ est une application linéaire.*

► Exemple : $x \mapsto x$ est dérivable sur $]a, b[$.
► Exemple : Dérivée de $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R},\ x \mapsto x + \dfrac{1}{x}$? de $g :]0, +\infty[\to \mathbb{R},\ x \mapsto x\sqrt{x}$

Propriété 18.

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall f \in \mathcal{D}(]a, b[, \mathbb{R}),\ (f^n)' = nf^{n-1}f'$.
Toute fonction polynôme $x \mapsto a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $x \mapsto a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \ldots + na_nx^{n-1}$.

La dérivée d'une fonction polynôme de degré n avec $n \geq 1$ est un polynôme de degré $n-1$.

Propriété 19.

Soit f et g deux fonctions dérivables sur $]a,b[$. On suppose en outre que, pour tout réel x appartenant à $]a,b[$, $g(x) \neq 0$.

La fonction $\dfrac{1}{g}$ est dérivable sur $]a,b[$ et $\left(\dfrac{1}{g}\right)' = \dfrac{-g'}{g^2}$.

La fonction $\dfrac{f}{g}$ est dérivable sur $]a,b[$ et $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$.

► Exemple : Donner la dérivée de $x \mapsto \dfrac{1}{x^n}$ avec $n \geq 1$ sur chacun des intervalles $]-\infty,0[$ et $]0,+\infty[$.

Propriété 20.

Les fractions rationnelles sont dérivables sur leur ensemble de définition.

► Exemple : $x \mapsto \dfrac{x^2-3x+6}{x-2}$ est dérivable sur $]-\infty,2[$ et sur $]2,+\infty[$. Il est préférable d'utiliser l'écriture $f(x) = x - 1 + \dfrac{4}{x-2}$ dans les calculs.

3.3 Dérivée d'une fonction composée

Théorème 2.

Soit $f : I \to J$, $g : J \to \mathbb{R}$, avec I et J deux intervales de $\mathbb{R}$. Si f est dérivable en $x_0 \in I$ et g est dérivable en $f(x_0)$ alors $g \circ f$ est dérivable en x_0 et

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \times f'(x_0).$$

► Exemple : Montrer que la fonction $x \mapsto \sqrt{x^2+2}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculez sa dérivée.

3.4 Réciproque d'une fonction dérivable bijective

Théorème 3.

Soit $f :]a,b[\to f(]a,b[)$ une fonction bijective et continue sur $]a,b[$. Si f est dérivable en $x_0 \in]a,b[$ telle que $f'(x_0) \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable en $f(x_0)$ et

$$(f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Interprétation géométrique : La tangente à $\mathcal{C}_f$ au point de coordonnées (x_0, y_0) a pour équation :
$Y - y_0 = f'(x_0)(X - x_0)$.
La tangente à $\mathcal{C}_f^{-1}$ au point de coordonnées (y_0, x_0) a pour équation :
$Y - x_0 = \dfrac{1}{f'(x_0)}(X - y_0)$ ssi $X - y_0 = f'(x_0)(Y - x_0)$.
Ces deux tangentes sont donc symétriques par rapport à la première bissectrice.

► Exemple : Soit $f : x \mapsto \dfrac{1}{\sin x}$.

1. Montrer que f est dérivable sur $I = \left[\dfrac{\pi}{2}, \pi\right[$ et préciser $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$.
2. Montrer que f réalise une bijection de I vers un intervalle J à déterminer.
3. f^{-1} est-elle dérivable sur J ? Déterminer $\left(f^{-1}\right)'$.

3.4.1 Etude des variations d'une fonction

Soit f continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$.

1. Si $f' \geq 0$ sur $[a,b]$ alors f est croissante sur $[a,b]$.
2. Si $f' \leq 0$ sur $[a,b]$ alors f est décroissante sur $[a,b]$.
3. Si $f' = 0$ sur $[a,b]$ alors f est constante sur $[a,b]$.
4. Si $f' > 0$ sur $[a,b]$ alors f est strictement croissante sur $[a,b]$.
5. Si $f' < 0$ sur $[a,b]$ alors f est strictement décroissante sur $[a,b]$.

Remarque 12. *Résultat faux si on ne se place pas sur un intervalle de $\mathbb{R}$: par exemple la fonction inverse sur $\mathbb{R}^*$. Le résultat reste vrai si on remplace f continue sur $[a,b]$ par f est continue sur $[a,b[$, $]a,b]$ ou $]a,b[$.*

► Exemple : deux fonctions dérivables sur un intervalle I et dont les dérivées sont égales sur I diffèrent d'une constante (conséquence du troisième point).

3.5 Dérivées d'ordre supérieur

Soit $f \in \mathcal{F}(]a,b[,\mathbb{R})$.
Si f' est continue sur $]a,b[$ on dit que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]a,b[$.
Si f' est dérivable sur $]a,b[$ on note $f'' = (f')'$.
Si f'' est continue sur $]a,b[$ on dit que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]a,b[$.
etc... Si $f^{(k)}$ est dérivable sur $]a,b[$ on note $f^{(k+1)} = (f^{(k)})'$.
On pose $f^{(0)} = f$.

Notation : $\forall k \in \mathbb{N},\ f^{(k)}$ est aussi notée $D^k f$ ou $\dfrac{d^k f}{dx^k}$.

Remarque 13. *La dérivée seconde en t_0 s'interpréte en cinématique comme accélération instantanée à l'instant t_0.*

Définition 19.

*On dit que f est **indéfiniment dérivable sur** $]a,b[$ lorsque $\forall n \in \mathbb{N}$, f est n fois dérivable.*

Propriété 21.

Etant données deux fonctions f et g définies et n fois dérivables sur $]a,b[$ et λ et μ deux réels, la fonction $\lambda f + \mu g$ est n fois dérivable sur $]a,b[$.

3.6 Dérivées usuelles

Les fonctions circulaires sont dérivables sur leur domaine de définition.
$\forall x \in \mathbb{R},\ \sin' x = \cos x$.
$\forall x \in \mathbb{R},\ \cos' x = -\sin x$.
$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, (\ln)'(x) = \dfrac{1}{x}$.
$\forall x \in \mathbb{R},\ (\exp)'(x) = \exp x$.
Si f est la fonction racine carrée, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

4 Brève extension aux fonctions complexes d'une variable réelle

Soit E un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un singleton et f définie sur E à valeurs dans $\mathbb{C}$.
On appelle **partie réelle de** f et on note $\mathrm{Re}(f)$, la fonction $x \longmapsto \mathrm{Re}(f(x))$. $\mathrm{Re}(f)$ est définie sur E et est à valeurs réelles.
On appelle **partie imaginaire de** f et on note $\mathrm{Im}(f)$, la fonction $x \longmapsto \mathrm{Im}(f(x))$. $\mathrm{Im}(f)$ est définie sur E et est

à valeurs réelles.
De plus, $f = \mathrm{Re}\,(f) + i\mathrm{Im}\,(f)$.

Si $f = u + iv$ avec u et v à valeurs réelles, la fonction $u - iv$ s'appelle **application conjuguée de** f et est notée $\bar{f}$.

On définit $|f| = \sqrt{(\mathrm{Re}(f))^2 + (\mathrm{Im}(f))^2} = \sqrt{f\bar{f}}$. $\forall x \in E, \quad |f\,(x)| = |f|\,(x)$; lorsque f ne s'annule pas, on a $\dfrac{1}{f} = \dfrac{\bar{f}}{|f|^2}$.

On dit que f est **bornée** lorsque $|f|$ est majorée.
On dit que f est **continue** en $x_0 \in E$ lorsque $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ admettent une limite finie en x_0, que $\lim\limits_{x\to x_0} \mathrm{Re}(f(x)) = \mathrm{Re}(f(x_0))$ et que $\lim\limits_{x\to x_0} \mathrm{Im}(f(x)) = \mathrm{Im}(f(x_0))$.

On dit que f est **continue** sur E lorsque f est continue en tout point x_0 de E.

Définition 20 (Dérivée en un point).

La fonction f est dérivable en $a \in E$ si et seulement si Ref et Imf sont dérivables en a et on a alors :

$$f'(a) = (Ref)'(a) + i(Imf)'(a).$$

► Exemples :
— Si f est dérivable en a alors $\bar{f}$ aussi et $(\bar{f})'(a) = \bar{f'}(a)$.
— Y revenir après le chapitre 6 : si f est dérivable en a alors e^f est dérivable en a et $(e^f)'(a) = f'(a)e^{f(a)}$.

Propriété 22.

Si f est dérivable en a alors elle est continue en a.

Propriété 23 (Opérations sur les fonctions dérivables).

Soient f et g deux fonctions complexes définies sur E et dérivables en $a \in E$, ainsi que λ et μ deux complexes.

1. *La fonction $\lambda f + \mu g$ est dérivable en a et $(\lambda f + \mu g)'(a) = \lambda f'(a) + \mu g'(a)$.*
2. *La fonction fg est dérivable en a et $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$.*
3. *Si $g(a) \neq 0$, la fonction $\dfrac{f}{g}$, définie au voisinage de a, est dérivable en a et $(\dfrac{f}{g})'(a) = \dfrac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{(g(a))^2}$.*

Démonstration : pour le dernier point, écrire $\dfrac{f}{g} = f\bar{g}\dfrac{1}{g\bar{g}}$.

Propriété 24.

Toute fonction polynomiale à coefficients compexes est dérivable sur $\mathbb{R}$:
Les fractions rationnelles à coefficients complexes sont dérivables sur leur ensemble de définition.

Définition 21 (Fonction n fois dérivable).

Soit $f \in \mathcal{F}(E, \mathbb{C})$. On pose $f^{(0)} = f$ et on définit par récurrence pour $k \geq 1$ la fonction dérivée k^{ieme} de f sur E ainsi : $f^{(k)} = (f^{(k-1)})'$.
$\forall k \in \mathbb{N}$, $f^{(k)}$ est aussi notée $D^k f$ ou $\dfrac{d^k f}{dx^k}$.
*On dit que f est **indéfiniment dérivable sur** E lorsque $\forall n \in \mathbb{N}$, f est n fois dérivable.*

Propriété 25.

$f \in \mathcal{F}(E, \mathbb{C})$ admet une dérivée n^{ieme} sur E ssi ses parties réelle et imaginaire admettent une dérivée n^{ieme} sur E et $Re(f^{(n)}) = (Re(f))^{(n)}$ et de même $Im(f^{(n)}) = (Im(f))^{(n)}$.

► Exemple : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C},\ x \mapsto e^{ix}$.

1. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.
2. Montrer que f est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminez $f^{(n)}$.

5 Etude d'une fonction

1. **Ensemble de définition $\mathcal{D}_f$.**
   Il s'agit de déterminer l'ensemble de tous les nombres réels x pour lesquels $f(x)$ existe.
2. **Eventuellement simplifier l'écriture** de $f(x)$ pour $x \in \mathcal{D}_f$.
3. **Réduction de l'intervalle d'étude :** recherche de périodicité, de symétries par rapport à une centre ou à un axe.
   (a) Parité.
   Si $\mathcal{D}_f$ n'est pas symétrique par rapport à O, il est inutile de chercher à montrer que f et paire ou impaire.
   f est paire ssi $\forall x \in \mathcal{D}_f,\ -x \in \mathcal{D}_f$ et $f(-x) = f(x)$.
   f est impaire ssi $\forall x \in \mathcal{D}_f,\ -x \in \mathcal{D}_f$ et $f(-x) = -f(x)$.
   Lorsque f est paire dans un repère $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$ alors $\mathcal{C}_f$ admet l'axe des ordonnées (droite d'équation x = 0) comme axe de symétrie.
   Lorsque f est impaire dans un repère $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$ alors $\mathcal{C}_f$ admet l'origine comme centre de symétrie.
   (b) Symétrie.
   La droite D : $x = a$ dans le repère $\mathcal{R}$ est un axe de symétrie de $\mathcal{C}_f$ ssi pour tout h tel que $a+h$ appartient à $\mathcal{D}_f$, on a $a - h \in \mathcal{D}_f$ et $f(a + h) = f(a - h)$.
   Le point de coordonnées (a, b) dans le repère $\mathcal{R}$ est un centre de symétrie de $\mathcal{C}_f$ ssi pour tout h tel que $a + h$ appartient à $\mathcal{D}_f$, on a $a - h \in \mathcal{D}_f$ et $f(a + h) + f(a - h) = 2b$.
   (c) Périodicité.
   Si f est périodique de période T alors la courbe $\mathcal{C}_f$ sur $\mathcal{D}_f$ s'obtient à partir de celle sur un intervalle d'amplitude T (c'est-à-dire de type $[x, x + T]$) par translations successives de vecteur $T\vec{i}$ et $-T\vec{i}$.
4. **Dérivabilité.**
   Préciser si f est dérivable sur $\mathcal{D}_f$ en tant que somme, produit ou quotient de fonctions dérivables sur $\mathcal{D}_f$. Attention dans le cas du quotient $\frac{u}{v}$ préciser que v ne s'annule pas sur $\mathcal{D}_f$.
5. **Etude des variations.**
   Deux méthodes :
   (a) Calcul de la dérivée, détermination de son signe,
   (b) f est croissante en tant que somme de fonctions croissantes, composée de fonctions croissantes, composée de fonctions décroissantes. f est décroissante en tant que somme de fonctions décroissantes, composée d'une fonction croissante et d'une fonction décroissante, composée d'une fonction décroissante et d'une fonction croissante.
6. **Construction du tableau de variations.**
   Préciser les points d'intersection éventuels de $\mathcal{C}_f$ avec les axes (et autres points remarquables).
7. **Etude des branches infinies.**

   — Si $\lim\limits_a f = \pm\infty$ Soit f une fonction définie sur un intervalle $]b, c[$ et $a \in]b, c[$. Si $\lim\limits_a f = \pm\infty$, on dit que la courbe de f admet en a une asymptote verticale (d'équation $x = a$).

   — Si $lim_{\pm\infty} f = a \in \mathbb{R}$ Soit f une fonction définie sur un intervalle du type $[a, +\infty[$ ou $]-\infty, b]$.
   Si $lim_{\pm\infty} f = a \in \mathbb{R}$, on dit que la courbe de f admet une asymptote horizontale d'équation $y = a$.
   — Si $lim_{\pm\infty} f = \pm\infty$ Soit f une fonction définie sur un intervalle du type $[a, +\infty[$ ou $]-\infty, b]$.
   Si $lim_{\pm\infty} f = \pm\infty$, on étudie la limite de $\frac{f(x)}{x}$ lorsque $x \to \pm\infty$. Quatre cas peuvent se présenter :
   — si $lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$, la courbe de f admet une branche parabolique de direction asymptotique (Ox).
   ▶ Exemple : Fonction racine carrée.
   — si $lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty$, la courbe de f admet une branche parabolique de direction asymptotique (Oy).
   ▶ Exemple : Fonction carrée.

— si $lim_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ n'existe pas, alors on ne peut rien dire.
► Exemple : La fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x)=x(\cos x+2)$.

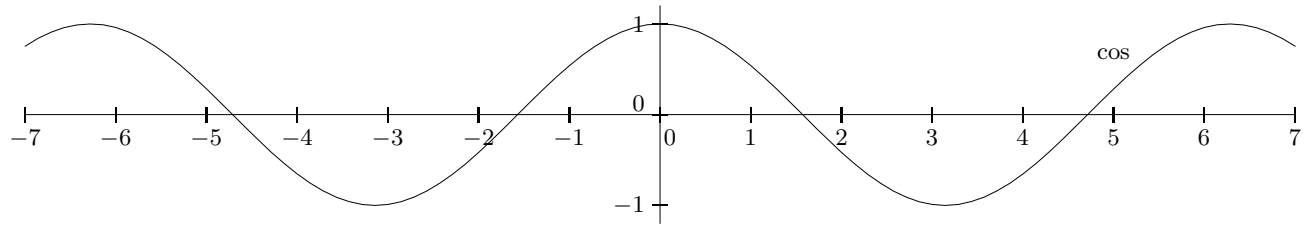
— si $lim_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}=a\in\mathbb{R}^*$, alors la courbe de f admet la droite d'équation $y=ax$ comme direction asymptotique. On étudie la limite de $f(x)-ax$ lorsque $x\to\pm\infty$.
— soit $lim_{x\to\pm\infty}f(x)-ax=b\in\mathbb{R}$, alors la courbe de f admet la droite d'équation $y=ax+b$ comme asymptote oblique.
► Exemple : La fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x)=\dfrac{x^2-3x+6}{x-2}$.
— soit $lim_{x\to\pm\infty}f(x)-ax=\pm\infty$, alors la courbe de f admet une branche parabolique de direction asymptotique $y=ax$.
► Exemple : La courbe de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x)=x+\sqrt{x}$ admet une branche parabolique de direction $y=x$ en $+\infty$.
— soit $lim_{x\to\pm\infty}f(x)-ax$ n'existe pas, alors la courbe de f admet une direction asymptotique mais ni branche parabolique, ni asymptote.
► Exemple : La fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x)=x+\cos x$.

8. **Equation des tangentes.**
Soit $a\in\mathcal{D}_f$. Supposons que f est dérivable en a. L'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point de coordonnées $(a,f(a))$ est $y=f'(a)(x-a)+f(a)$

9. **Etude de la convexité.** Si f est deux fois dérivable sur un intervalle I et si f'' est positive sur I alors la restriction de la courbe de f à l'intervalle I est au dessus de chacune de ses tangentes (elle tourne sa concavité vers le haut).
Si f est deux fois dérivable sur un intervalle I et si f'' est négative sur I alors la restriction de la courbe de f à l'intervalle I est en dessous de chacune de ses tangentes (elle tourne sa concavité vers le bas).

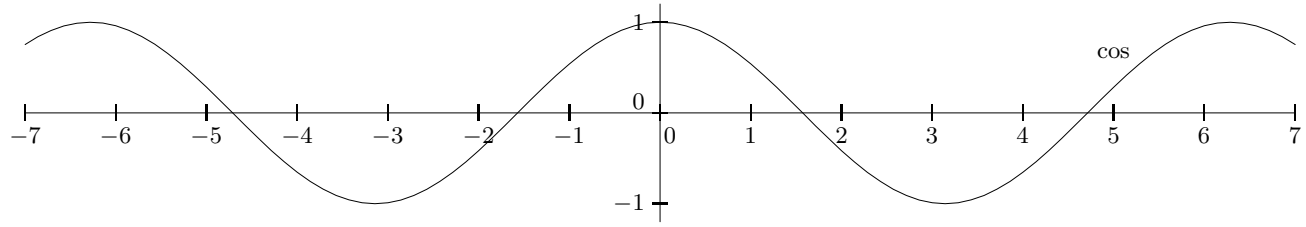
10. **Tracé de la courbe.**
Les axes, l'origine et les vecteurs unitaires du repère doivent toujours apparaitre. On dessine $\mathcal{C}_f$ en respectant le type de repère et les unités de longueur de l'énoncé. Les tangentes aux points remarquables doivent être dessinées. **Ne pas oublier les symétries et périodicités éventuelles**.

Représentation graphique de $f_1 \ : \ x \mapsto f(x) + 2$.



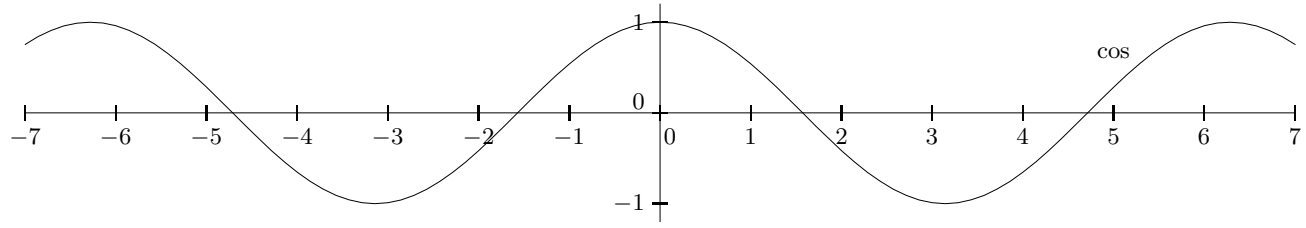
.

Représentation graphique de $f_2 \ : \ x \mapsto f(x + 2)$.



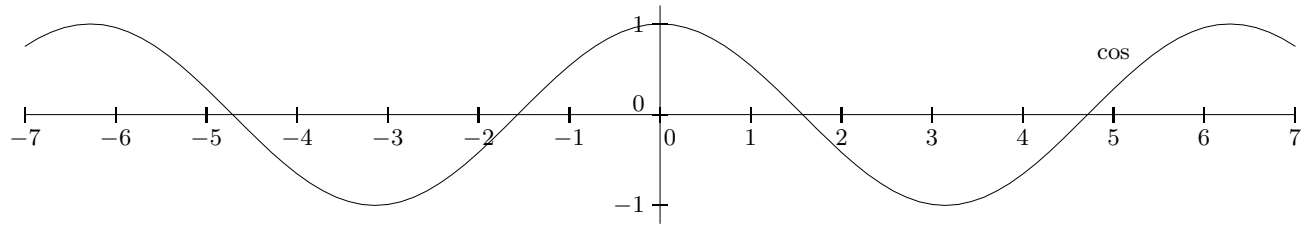
.

Représentation graphique de $f_3 \ : \ x \mapsto -f(x)$.



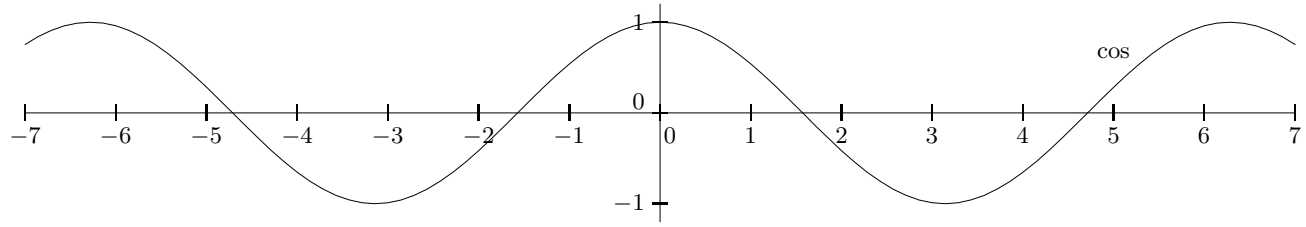
.

Représentation graphique de $f_4 \ : \ x \mapsto f(-x)$.



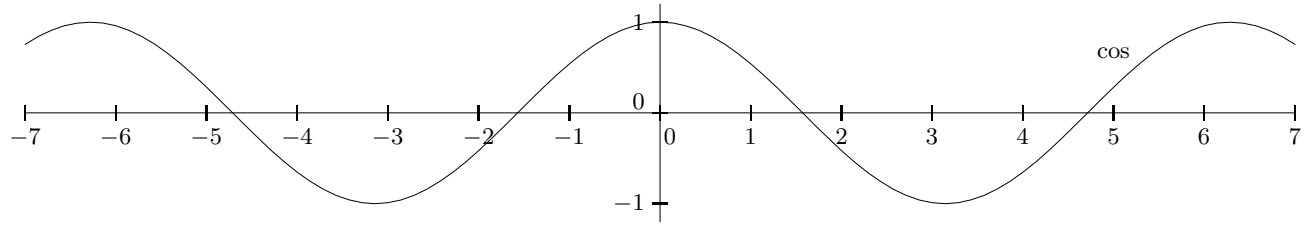
.

Représentation graphique de $f_5 \ : \ x \mapsto |f(x)|$.



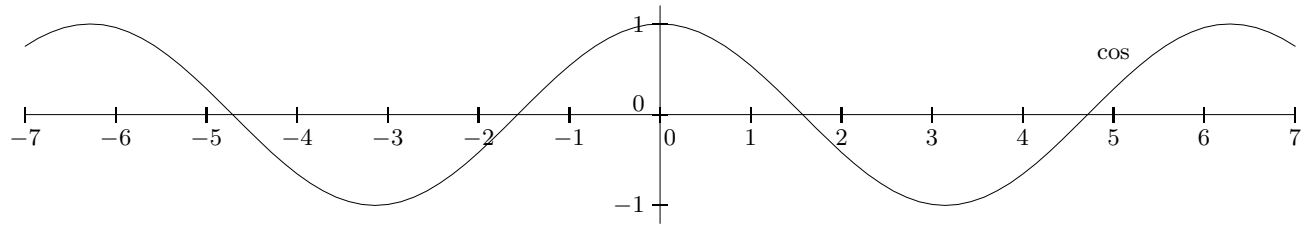
.

Représentation graphique de $f_6 \ : \ x \mapsto 2f(x)$.



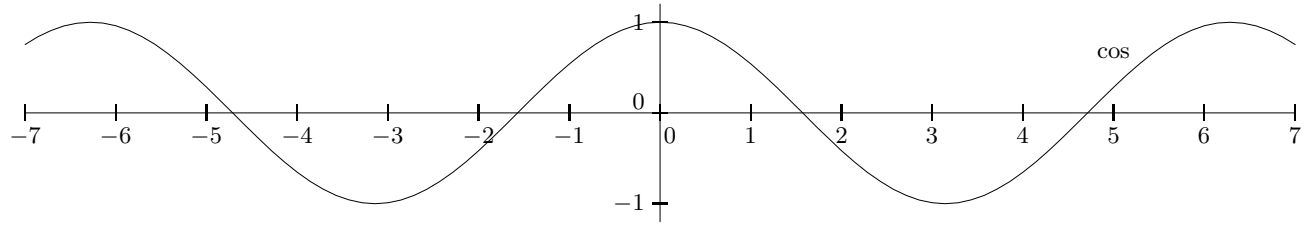
.

Représentation graphique de $f_7 \ : \ x \mapsto f(2x)$.



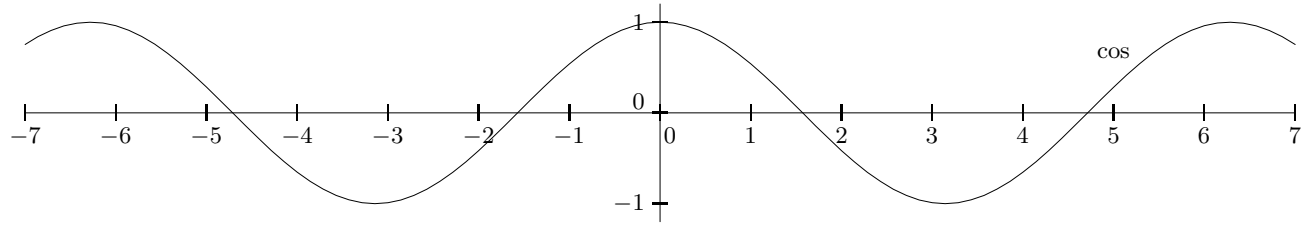
.

Représentation graphique de $h \ : \ x \mapsto f(x-2)$.



.

Représentation graphique de $f_8 \ : \ x \mapsto f(2-x)$.



.