Chapitre 5 : Applications, relations

1 Notion d'application

1.1 Définition, exemple

Définition 1.

*On appelle application d'un ensemble non vide E dans un ensemble non vide F toute fonction de E dans F dont le domaine de définition est E tout entier, c'est-à-dire une relation qui, à chaque élément x de E, associe **un unique** élément y de F.*

$$\forall x \in E,\ \exists! y \in F \mid y = f(x).$$

On dit que x est un antécédent de y et que y est l'image de x.
On note $\mathcal{F}(E,F)$ ou F^E l'ensemble des applications de E dans F (on dit aussi de E vers F).

Remarque 1. *On rappelle qu'une fonction de E vers F est une relation qui, à chaque élément x de E, associe **au plus un** élément y de F.*
Toute application est une fonction. Toute fonction est une application sur son domaine de définition.

▶ Méthode : pour montrer qu'une relation donnée est une application, on peut :

1. déterminer l'ensemble de départ E et l'ensemble d'arrivée F
2. démontrer que tout élément x de E a une image y dans F
3. vérifier que cette image y est unique pour x donné.

▶ Exemples :

— Une famille d'éléments de E indexée par un ensemble I est une application de I dans E. Si x est une telle famille, on note x_i à la place de $x(i)$ l'image de l'élément $i \in I$ par x. La famille est notée $(x_i)_{i\in I}$. L'ensemble des familles d'éléments de E indexées par un ensemble I est notée E^I.

— En particulier une famille $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ indexée par $\mathbb{N}$ est appelée suite. L'ensemble des suites d'éléments de E est noté $E^{\mathbb{N}}$.

— L'application identique de E, ou identité, notée Id_E, associe tout élément de E à lui-même.

Définition 2.

Le graphe d'une application $f : E \to F$ est l'ensemble $\{(x, f(x)) \in E \times F \mid x \in E\}$, inclus dans $E \times F$.

Définition 3.

On appelle fonction indicatrice d'une partie A d'un ensemble E la fonction notée 1_A et définie de E dans $\{0,1\}$ par :

$$1_A(x) = 1 \text{ si } x \in A \text{ et } 0 \text{ si } x \notin A.$$

1.2 Restriction - prolongement

Définition 4.

> ***La*** *restriction d'une application $f : E \to F$ à une partie A de E, notée $f_{|A}$, est l'application : $A \to F,\ x \mapsto f(x)$.*
> *Si E est inclus dans un ensemble E', on appelle prolongement de f à E' toute application h de E' dans F dont la restriction à E est f : $h_{|E} = f$. h est **un** prolongement de f à E'.*

1.3 Opérations sur les applications (rappels)

Soit f une application de l'ensemble E vers l'ensemble F et g une application de l'ensemble F vers l'ensemble G. On écrit :

Donc, à tout $x \in E$ on peut faire correspondre un $z \in G$, par l'intermédiaire d'un $y \in F$. On définit ainsi une application de E vers G. Cette application est dite **composée de** f **par** g et est notée $g \circ f$ (g rond f). Cette notation où g précède f s'explique par la relation : $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.
Soient f et g deux applications définies sur un même ensemble E et prenant leurs valeurs dans un même ensemble F dans lequel existe une addition notée $+$. A tout $x \in E$ on peut faire correspondre $f(x) + g(x)$. Cette nouvelle application est notée $f + g$ et est appelée **fonction-somme**.
De même on définit une **fonction-différence**, une **fonction produit**, une **fonction quotient**.

1.4 Image directe et image réciproque d'une partie par une application

Définition 5.

> *Soit f une application de E dans F.*
> - *On appelle image directe par f d'une partie A de E l'ensemble :*
> $$f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}.$$
> *Ecrire $y \in f(A)$ signifie que je peux écrire y sous la forme $f(x)$, où $x \in A$.*
> *$f(E)$ est exactement l'ensemble des éléments de E qui peuvent s'écrire $f(qqch)$. On note aussi $f(E) = Imf$.*
> - *On appelle image réciproque d'une partie B par f l'ensemble :*
> $$f^{-1}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\}.$$
> *$f^{-1}(B)$ désigne l'ensemble des éléments de E dont l'image par f est dans B.*

Remarque 2. *La notation $f^{-1}(B)$ ne suppose pas que f soit bijective.*

► Exemple : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2$.

1. Soit $A_1 = [-3, 1]$ et $A_2 = [-2, 3]$. Déterminer $f(A_1)$, $f(A_2)$, $f(A_1) \cap f(A_2)$, $f(A_1 \cap A_2)$.
2. Soit $B_1 = [-1, 9]$ et $B_2 = [-2, 4]$. Déterminer $f^{-1}(B_1)$, $f^{-1}(B_2)$, $f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$, $f^{-1}(B_1 \cap B_2)$.

Propriété 1.

Soit $f \in \mathcal{F}(E, F)$.

1. *Soient $A,\ B \in \mathcal{P}(E)$. $A \subset B \Rightarrow f(A) \subset f(B)$*
2. *Soient $A,\ B \in \mathcal{P}(F)$. $A \subset B \Rightarrow f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B)$*
3. *Soient $A,\ B \in \mathcal{P}(E)$. $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$*
4. *Soient $A,\ B \in \mathcal{P}(E)$. $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$*
5. *Soient $A,\ B \in \mathcal{P}(F)$. $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$*
6. *Soient $A,\ B \in \mathcal{P}(F)$. $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$*
7. *Soit $A \in \mathcal{P}(E)$. $A \subset f^{-1}(f(A))$*
8. *Soit $B \in \mathcal{P}(F)$.$f(f^{-1}(B)) \subset B$.*

Remarque 3. *Si $f(A) \subset A$, on dit que A est stable par f.*

1.5 Qualités d'une application

Définition 6.

Une application $f\ :\ E \to F$ est :

— *injective si tout élément de F possède **au plus** un antécédent par f, c'est-à-dire si, pour tout $y \in F$, l'équation $f(x) = y$ possède **au plus** une solution x dans E.*

— *surjective si tout élément de F possède **au moins** un antécédent par f, c'est-à-dire si, pour tout $y \in F$, l'équation $f(x) = y$ possède **au moins** une solution x dans E.*

— *bijective si tout élément de F possède **exactement** un antécédent par f, c'est-à-dire si, pour tout $y \in F$, l'équation $f(x) = y$ possède **exactement** une solution x dans E.*

Remarque 4. *Autrement dit, f est injective si deux éléments distincts de E ont des images distinctes dans F :*

$$\forall x_1 \in E,\ \forall x_2 \in E,\ x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2),$$

$$\textit{ou}\ \forall x_1 \in E,\ \forall x_2 \in E,\ f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

f est surjective si $\forall y \in F,\ \exists x \in E,\ y = f(x)$. Dans ce cas l'ensemble des valeurs coïncide avec l'ensemble d'arrivée : $f(E) = F$.
f est bijective si elle est à la fois injective et surjective, c'est-à-dire si $\forall y \in F,\ \exists! x \in E,\ y = f(x)$.

► Exemple : $\sin :\ \mathbb{R} \to [-1, 1]$ n'est pas injective.

► Exemple : Soit $f\ :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2$. f est-elle injective ? surjective ?

► Exemple : Soit φ l'application $\left|\begin{array}{c} (\mathbb{R}) \to (\mathbb{U}) \\ \theta \mapsto e^{i\theta} \end{array}\right.$

φ n'est pas injective (φ est 2π-périodique). $\{\theta \in \mathbb{R} \mid e^{i\theta} = 1\} = 2\pi\mathbb{Z}$.
Pour $\theta \in \mathbb{R}$, $e^{i\theta} = 1 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \mid \theta = 2k\pi$.
Pour $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$, $e^{i\theta} = e^{i\theta'} \Leftrightarrow \theta = \theta'$ à 2π près
φ est surjective.

Si $f\ :\ E \to F$ est bijective, son application réciproque, notée f^{-1}, est l'application qui associe à tout élément de F son unique antécédent dans E. Elle vérifie $f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_F$ et $f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_E$. f^{-1} est une bijection de F dans E : $f^{-1} \in \mathcal{F}(F, E)$.

$$(y = f(x) \text{ et } x \in E) \Leftrightarrow (x = f^{-1}(y) \text{ et } y \in F).$$

► Exemple : Soit $f\ :\ [-2, +\infty[\to \mathbb{R}^+,\ x \mapsto \sqrt{x+2}$ est bijective. Déterminer son application réciproque.

Définition 7.

Une application bijective f de E sur E est dite <u>*involutive*</u> *si elle coïncide avec sa réciproque f^{-1} :*

$$f \text{ involutive } \Leftrightarrow f = f^{-1}.$$

Remarque 5. *On montrera en TD que :*

1. *Si f est injective alors $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.*
2. *Si f injective alors $f^{-1}(f(A)) = A$.*
3. *Si f est surjective alors $f(f^{-1}(B)) = B$.*

1.6 Composition des applications

Propriété 2 (Associativité de $\circ$).

Soient E, F, G et H quatre ensembles. $\forall f \in \mathcal{F}(E,F)$, $\forall g \in \mathcal{F}(F,G)$ et $\forall h \in \mathcal{F}(G,H)$, $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

Propriété 3 (Qualités de la composée de deux applications).

1. *La composée de deux applications injectives est injective.*
2. *La composée de deux applications surjectives est surjective.*
3. *La composée de deux applications bijectives est bijective.*

Propriété 4 (Application réciproque d'une composée d'applications bijectives).

Si $f : E \to F$ et $g : F \to G$ sont bijectives, leur composée $g \circ f$ est aussi bijective et l'on a $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Remarque 6. *On montrera en TD que $g \circ f$ injective $\Rightarrow$ f injective et que $g \circ f$ surjective $\Rightarrow g$ surjective.*

2 Relation d'équivalence

Définition 8 (Relation binaire).

Une relation binaire $\mathcal{R}$ définie sur un ensemble E est une propriété que chaque couple (x, y) de E^2 est susceptible d'avoir ou non. Lorsqu'un couple $(x, y) \in E^2$ possède la propriété $\mathcal{R}$, on note alors $x\mathcal{R}y$.

► Exemples :
$x = y$
$x \leq y$ dans $\mathbb{R}$
p divise q dans $\mathbb{Z}$, que l'on notera $p|q$
$y = f(x)$ par exemple $y = x^2$
$x - y$ divisible par 3 dans $\mathbb{Z}$.

Plusieurs types de relations sont à envisager :
- les relations du type fonction : $y = f(x)$,
- les relations du type comparaison $<$, $>$, $\leq$, $\geq$, ...
- les relations exprimant une propriété commune.

Définition 9 (Qualités d'une relation).

Soit une relation binaire $\mathcal{R}$ définie sur un ensemble E, on dit qu'elle est

- ***réflexive*** *lorsque* $\forall x \in E,\ x\mathcal{R}x$ *($\leq$ l'est alors que $<$ ne l'est pas),*
- ***symétrique*** *lorsque* $\forall x \in E,\ \forall y \in E,\ x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x$ *($=$ l'est mais $\leq$ ne l'est pas),*
- ***antisymétrique*** *lorsque* $\forall x \in E,\ \forall y \in E,\ x\mathcal{R}y$ *et* $y\mathcal{R}x \Rightarrow x = y$ *($\leq$ l'est mais p/q dans $\mathbb{Z}$ ne l'est pas)*
- ***transitive*** *lorsque* $\forall x \in E,\ \forall y \in E,\ \forall z \in E,\ x\mathcal{R}y$ *et* $y\mathcal{R}z \Rightarrow x\mathcal{R}z$ *($<$ l'est mais pas $y = f(x)$ en général).*

Remarque 7. *Seule l'égalité sur un ensemble E est une relation binaire à la fois symétrique et antisymétrique.*

Définition 10 (Relation d'équivalence).

On appelle ***relation d'équivalence*** *définie sur un ensemble E non vide toute relation binaire réflexive, symétrique et transitive.*
Soit $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence définie sur E et x un élément de E. La classe d'équivalence de x est l'ensemble de tous les éléments y de E qui sont en relation avec x. On la note $Cl(x)$. On a donc

$$Cl(x) = \{y \in E \mid x\mathcal{R}y\}.$$

► Exemple : : La relation de congruence modulo 2π est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$. La classe d'équivalence de 0 est $2\pi\mathbb{Z}$, celle de π est $\pi + 2\pi\mathbb{Z}$.

Remarque 8. *Si $y \in Cl(x)$, $Cl(x) = Cl(y)$.*

► Exemple : Pour $m, n \in \mathbb{Z}$, on pose $m\mathcal{R}n$ si et seulement si $m + n$ est un entier pair.

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}$.
2. Décrire les classes d'équivalence de cette relation.

Définition 11 (Relation d'ordre).

On appelle ***relation d'ordre*** *définie sur un ensemble E non vide toute relation binaire réflexive, antisymétrique et transitive.*
On appelle ***ensemble ordonné*** *un couple formé par un ensemble et une relation d'ordre définie sur cet ensemble : $(E, \mathcal{R})$.*
On dit que x et y sont ***comparables*** *si au moins l'une des propositions $x\mathcal{R}y$ ou $y\mathcal{R}x$ est vraie.*
L'ordre est ***total*** *lorsque deux éléments quelconques de E sont toujours comparables, sinon on dit qu'il est* ***partiel****.*

► Exemples : : $\leq$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{R}$. $\subset$ est une relation d'ordre sur $\mathcal{P}(E)$.

► Exemple : Pour $m, n \in \mathbb{N}^*$, on pose $m\mathcal{R}n$ si et seulement si $m|n$.

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{N}^*$.
2. L'ordre est-il total ?