TD 5 : applications et relations

▶ Exercice 1 :

1. Soit $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \to \mathbb{Q},\ (p,q) \mapsto \dfrac{p}{q}$. f est-elle injective, surjective, bijective ?
2. Montrer qu'il existe une bijection de $]0,1]$ sur $[1,+\infty[$.
3. Montrer qu'il existe une bijection de $\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{N}$.

▶ Exercice 2 : Soit $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications.

1. Montrer que si $g \circ f$ est injective alors f est injective. A-t-on nécessairement g injective ?
2. Montrer que si $g \circ f$ est surjective alors g est surjective. A-t-on nécessairement f surjective ?
3. Montrer que toute application involutive est bijective.

▶ Exercice 3 : Soient E, F et G des ensembles, f et g deux applications de e dans F, h et k deux applications de F dans G. Montrer que :

1. si f est surjective alors $(h \circ f = k \circ f \Leftrightarrow h = k)$.
2. si h est injective alors $(h \circ f = h \circ g \Leftrightarrow f = g)$.

▶ Exercice 4 : Soit $f \in \mathcal{F}(E,F)$ et B une partie quelconque de F.

1. Montrer l'inclusion $f(f^{-1}(B)) \subset B$.
2. Montrer que l'égalité est vraie pour tout B ssi f est surjective.

▶ Exercice 5 : Soit $f \in \mathcal{F}(E,F)$ et A une partie quelconque de E.

1. Comparer A et $f^{-1}(f(A))$.
2. A-t-on l'équivalence : $(\forall A \in \mathcal{P}(E),\ f^{-1}(f(A)) = A) \Leftrightarrow f$ est injective ?

▶ Exercice 6 : Dans chacun des cas suivants, examiner injectivité et surjectivité éventuelles de f ; précisez l'ensemble des valeurs (ou ensemble image) :

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.
2. $f : \mathbb{R} \to]0,1],\ x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$.
3. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x,y) \mapsto (y,x)$.
4. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x,y) \mapsto (\dfrac{x+y}{2}, \dfrac{x+y}{2})$.

▶ Exercice 7 : On définit sur $\mathbb{C}$ une relation binaire en posant $z\mathcal{R}z' \Leftrightarrow |z| = |z'|$.

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{C}$.
2. Décrire la classe d'équivalence d'un élément z de $\mathbb{C}$.

▶ Exercice 8 : Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on pose $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x^2 - y^2 = x - y$.

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$.
2. Décrire la classe d'équivalence d'un élément x de $\mathbb{R}$.

► Exercice 9 : On définit sur $\mathbb{N}^2$ une relation binaire en posant $(x,y)\mathcal{R}(x',y') \Leftrightarrow x \leq x'$ et $y \leq y'$.

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{N}^2$. Cet ordre est-il total ?
2. On pose $A = \{(1,1),(2,3),(2,4),(4,5),(5,2)\}$. Déterminer majorants, minorants, extrema de A.
3. Reprendre la question précédente avec $B = \{(2,1),(1,3),(5,2),(1,5),(5,6)\}$.