DM2 cor. MPSI

Exercice 1 :

① $\cos$ est définie sur $\mathbb{R}$ donc $\cos^3$ aussi
$\sin$ est définie sur $\mathbb{R}$ donc $\sin^3$ aussi $\Big\}$ f est donc définie sur $\mathbb{R}$. $\mathcal{D} = \mathbb{R}$

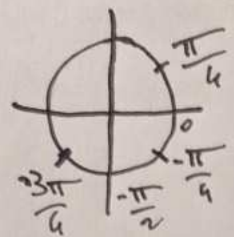
② $\forall x \in \mathbb{R}$ $\quad f(-x) = \cos^3(-x) + \sin^3(-x) = \cos^3 x - \sin^3 x$
Donc f n'est ni paire, ni impaire
$\cos$ et $\sin$ sont 2π-périodiques donc f également

③ $\forall x \in \mathbb{R}$, $\frac{\pi}{2} - x \in \mathbb{R}$ et $f\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \cos^3\left(\frac{\pi}{2}-x\right) + \sin^3\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$
$$= (\sin(x))^3 + (\cos(x))^3 = \cos^3 x + \sin^3 x = f(x)$$
Ainsi $\forall h \in \mathbb{R}$, $\frac{\pi}{4} - h \in \mathbb{R}$ et $\frac{\pi}{4} + h \in \mathbb{R}$
et $f\left(\frac{\pi}{4}-h\right) = f\left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{4}+h\right)\right) = f\left(\frac{\pi}{4}+h\right)$ d'après ce qui précède en prenant $x = \frac{\pi}{4} + h$.
Donc $\mathcal{C}_f$ admet la droite d'équation $x = \frac{\pi}{4}$ comme axe de symétrie.

④ Comme f est 2π-périodique, il suffit de l'étudier sur un intervalle de longueur ou d'amplitude 2π.
Comme $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = \frac{\pi}{4}$, il suffit d'étudier f sur $\left[\frac{\pi}{4} - \pi, \frac{\pi}{4}\right]$. Ainsi on construira $\mathcal{C}_f$ sur $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} + \pi\right]$ par symétrie par rapport à la droite d'équation $x = \frac{\pi}{4}$ puis sur $\mathbb{R}$ par translations successives de vecteurs $2k\pi\vec{i}$ où $k \in \mathbb{Z}$.

⑤ f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$: $\cos^3$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonctions dérivables et $\sin^3$ aussi.
Soit $x \in \mathbb{R}$, $\quad f'(x) = 3\cos^2 x\,(-\sin x) + 3\sin^2 x\,(\cos x)$ puisque f est de la forme $f = u^3 + v^3$ avec $u = \cos$ et $v = \sin$
et $(u^3)' = 3u^{3-1} \times u'$ et $(v^3)' = 3v^{3-1} \times v'$
Ainsi $f'(x) = 3\cos x \sin x\,(-\cos x + \sin x) = 3\cos x \sin x \sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin x\right)$
$$= 3\sqrt{2}\cos x \sin x\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x\right)$$
$$= 3\sqrt{2}\cos x \sin x\left(-\cos\frac{\pi}{4}\cos x + \sin\frac{\pi}{4}\sin x\right)$$
$$= -3\sqrt{2}\cos x \sin x\left(\cos\frac{\pi}{4}\cos x - \sin\frac{\pi}{4}\sin x\right)$$
$$f'(x) = -3\sqrt{2}\cos x \sin x\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)\right).$$

⑥



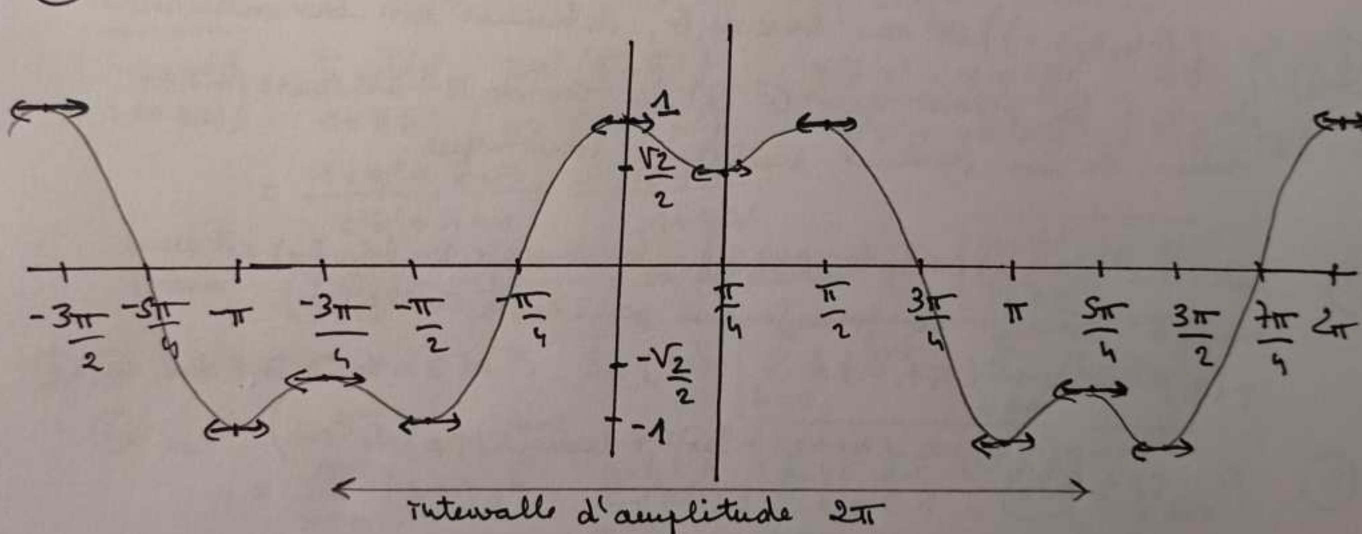
x	$-\frac{3\pi}{4}$		$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{4}$
$\cos x$		$-$	0	$+$		$+$	
$\sin x$		$-$		$-$	0	$+$	
$\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)$	0	$+$		$+$		$+$	0
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0
$f(x)$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\searrow$	-1	$\nearrow$ (0)	1	$\searrow$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$

$f\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 = \frac{-2\sqrt{2}}{8} - \frac{2\sqrt{2}}{8} = \frac{-4\sqrt{2}}{8} = \frac{-\sqrt{2}}{2}$

$f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$

$f(0) = 1$ et $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $f\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 = 0$

⑦



Exercice 2

① ⓐ $|j| = \sqrt{(-\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2} = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{4}{4}} = 1$ donc $\underline{j \in \mathbb{U}}$

ⓑ $j^2 = \left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = (-\frac{1}{2})^2 - 2\times\frac{1}{2}\times i\frac{\sqrt{3}}{2} + \left(i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} - i\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{4} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$j^3 = \left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = (-\frac{1}{2})^2 - \left(\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}+\frac{3}{4} = 1$

$j^4 = j^3 \times j = 1\times j = -\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$

ⓒ $A(a)$, $B(ja)$ et $C(j^2a)$.

$AB = |ja-a| = |(j-1)a| = |j-1||a| = \left|-\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right||a| = \sqrt{\frac{9}{4}+\frac{3}{4}}\,|a| = \sqrt{\ }\ |a| = \sqrt{3}|a|$

$BC = |j^2a - ja| = |j^2-j||a| = \left|-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right||a| = |-i\sqrt{3}||a| = \sqrt{3}|-i||a| = \sqrt{3}|a|$

$AC = |j^2a - a| = |j^2-1||a| = \left|-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}-1\right| = \left|-\frac{3}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right| = \sqrt{\frac{9}{4}+\frac{3}{4}}\,|a| = \sqrt{\frac{12}{4}}\,|a| = \sqrt{3}|a|$

$AB=BC=AC$ donc $\underline{ABC \text{ est équilatéral}}$

② Soient $z\in\mathbb{U}$, $z'\in\mathbb{U}$ tq $zz'\neq -1$. Mq $\frac{z+z'}{1+zz'}\in\mathbb{R}$.

$\overline{\left(\frac{z+z'}{1+zz'}\right)} = \frac{\bar z+\bar z'}{1+\bar z\bar z'} = \frac{zz'(\bar z+\bar z')}{zz'(1+\bar z\bar z')} = \frac{z\bar z z' + zz'\bar z'}{zz'+z\bar z z'\bar z'}$ $\quad z\bar z = |z|^2 = 1$, $z'\bar z' = |z'|^2 = 1$

$= \frac{1\times z' + z\times 1}{zz'+1\times 1} = \frac{z+z'}{1+zz'}$

Comme $\overline{\left(\frac{z+z'}{1+zz'}\right)} = \frac{z+z'}{1+zz'}$, on en déduit que $\boxed{\frac{z+z'}{1+zz'}\in\mathbb{R}}$

③ ⓐ Soit $z\in\mathbb{C}$ et $n\in\mathbb{N}^*$. $S_n(z) = \boxed{\sum_{k=1}^{n} kz^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)z^k}$

ⓑ $S_n(1) = n1^{n-1}+(n-1)1^{n-2}+\dots+3\times1^2+2\times1+1 = n+(n-1)+\dots+2+1$

$= \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)1^k = \sum_{k=0}^{n-1}(k+1) = \sum_{k=0}^{n-1}k + \sum_{k=0}^{n-1}1 = \frac{(n-1)n}{2}+n =$

$= n\left(\frac{n-1}{2}+\frac{2}{2}\right) = n\frac{n+1}{2} = \boxed{\frac{n(n+1)}{2} = S_n(1)}$

ⓒ Supposons $z\neq 1$

$(1-z)S_n(z) = (1-z)\sum_{k=1}^{n}kz^{k-1} = \sum_{k=1}^{n}kz^{k-1} - \sum_{k=1}^{n}kz^{k-1}z$

par linéarité de la somme.

$= \sum_{k=1}^{n}kz^{k-1} - \sum_{k=1}^{n}kz^k = \sum_{i=1}^{n}iz^{i-1} - \sum_{i=2}^{n+1}(i-1)z^{i-1}$

changement d'indice $i=k+1$ dans la 2e somme.

$= \sum_{i=2}^{n}iz^{i-1} + 1z^{1-1} - \left(\sum_{i=2}^{n}(i-1)z^{i-1} + (n+1-1)z^{n+1-1}\right)$

$= \sum_{i=2}^{n}iz^{i-1} + 1 - \sum_{i=2}^{n}(i-1)z^{i-1} - nz^n$ $\quad$ changement d'indice $j=i-1$

$= \sum_{i=2}^{n}(i-(i-1))z^{i-1} + 1 - nz^n = \sum_{i=2}^{n}z^{i-1}+1-nz^n = \sum_{j=1}^{n-1}z^j+1-nz^n$

$(1-z)S_n(z) \underset{z\neq 1}{=} \dfrac{z^1 - z^n}{1-z} + 1 - nz^n$ donc $S_n(z) = \dfrac{z-z^n}{(1-z)^2} + \dfrac{1-nz^n}{1-z}$

$$S_n(z) = \frac{z-z^n}{(1-z)^2} + \frac{1}{1-z} - n\frac{z^n}{1-z} = \frac{z-z^n}{(1-z)^2} + \frac{1-z}{(1-z)^2} - n\frac{z^n}{1-z}$$

$$S_n(z) = \boxed{\frac{1-z^n}{(1-z)^2} - n\frac{z^n}{1-z}}$$

d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} k\sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right) = \sum_{k=1}^{n-1} k\,\mathrm{Im}\left(e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right) = \mathrm{Im}\left(\sum_{k=1}^{n-1} k e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)$

car la partie imaginaire est linéaire

or $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} k e^{\frac{2ik\pi}{n}} = \sum_{k=1}^{n-1} k\left(e^{\frac{2i\pi}{n}}\right)^k = e^{\frac{2i\pi}{n}}\sum_{k=1}^{n-1} k\left(e^{\frac{2i\pi}{n}}\right)^{k-1}$

$\displaystyle = e^{\frac{2i\pi}{n}}\left(S_{n-1}\left(e^{\frac{2i\pi}{n}}\right)\right)$ or $e^{\frac{2i\pi}{n}} \neq 1$ donc

$$\sum_{k=1}^{n-1} k e^{\frac{2ik\pi}{n}} = e^{\frac{2i\pi}{n}}\left(\frac{1-\left(e^{\frac{2i\pi}{n}}\right)^{n-1}}{\left(1-e^{\frac{2i\pi}{n}}\right)^2} - (n-1)\frac{\left(e^{\frac{2i\pi}{n}}\right)^{n-1}}{1-e^{\frac{2i\pi}{n}}}\right)$$

$$= \frac{e^{\frac{2i\pi}{n}} - \left(e^{\frac{2i\pi}{n}}\right)^n}{\left(1-e^{\frac{2i\pi}{n}}\right)^2} - (n-1)\frac{\left(e^{\frac{2i\pi}{n}}\right)^n}{1-e^{\frac{2i\pi}{n}}}$$

$$= \frac{e^{\frac{2i\pi}{n}} - 1}{\left(1-e^{\frac{2i\pi}{n}}\right)^2} - (n-1)\frac{1}{1-e^{\frac{2i\pi}{n}}}$$

$$= \frac{e^{\frac{i\pi}{n}}\left(e^{\frac{i\pi}{n}} - e^{-\frac{i\pi}{n}}\right)}{\left(e^{\frac{i\pi}{n}}\left(e^{-\frac{i\pi}{n}} - e^{\frac{i\pi}{n}}\right)\right)^2} - (n-1)\frac{1}{e^{\frac{i\pi}{n}}\left(e^{-\frac{i\pi}{n}} - e^{\frac{i\pi}{n}}\right)}$$

$$= \frac{e^{\frac{i\pi}{n}}\left(2i\sin\frac{\pi}{n}\right)}{e^{\frac{2i\pi}{n}}\left(2i\sin\left(-\frac{\pi}{n}\right)\right)^2} - (n-1)\frac{1}{e^{\frac{i\pi}{n}}\left(2i\sin\left(-\frac{\pi}{n}\right)\right)}$$

$$= \frac{1}{e^{\frac{i\pi}{n}}}\frac{2i\sin\frac{\pi}{n}}{-4\sin^2\left(\frac{\pi}{n}\right)} + (n-1)\frac{1}{e^{\frac{i\pi}{n}}\left(2i\sin\frac{\pi}{n}\right)}$$

$$= e^{-\frac{i\pi}{n}}\left(i\frac{1}{-2\sin\frac{\pi}{n}} + (n-1)(-i)\times\frac{1}{2\sin\frac{\pi}{n}}\right)$$

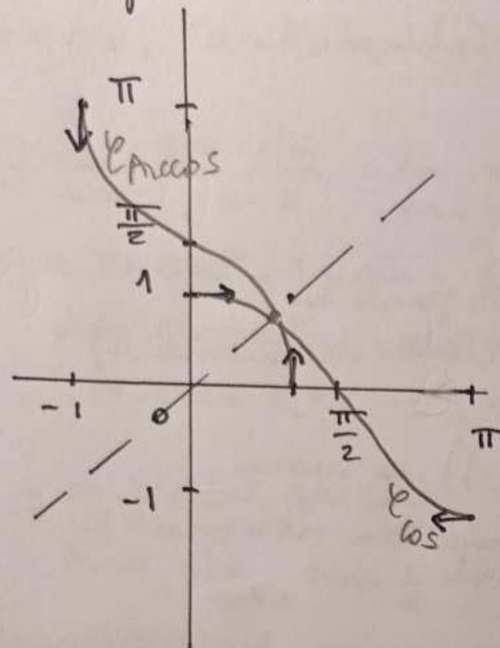
$$= \left(\cos\frac{\pi}{n} - i\sin\frac{\pi}{n}\right)\times\frac{i}{2\sin\frac{\pi}{n}}\left(-1-(n-1)\right)$$

on développe et on prend la partie imaginaire

Ainsi $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} k\sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right) = \frac{\cos\frac{\pi}{n}}{2\sin\frac{\pi}{n}}\times(-n) = \boxed{\frac{-n}{2\tan\frac{\pi}{n}}}$

Exercice 3

① F est strictement décroissante et continue sur $[0,\pi]$ donc elle réalise une bijection de $[0,\pi]$ vers $[-1,1]$ car $\cos(0)=1$ et $\cos(\pi)=-1$



$\underline{Arccos(1)=0}$ car $\cos 0 = 1$

$\underline{Arccos(0)=\frac{\pi}{2}}$ car $\cos\frac{\pi}{2}=0$

$\underline{Arccos(-1)=\pi}$ car $\cos\pi=-1$

F est dérivable sur $[0,\pi]$ car cos dérivable sur $\mathbb{R}$

$\forall x\in[0,\pi]\quad F'(x)=-\sin x$

$\forall x\in[0,\pi],\ F'(x)=0$ ssi $x=0$ ou $x=\pi$

Donc Arccos est dérivable sur

$[-1,1]\setminus\{F(0),F(\pi)\}=[-1,1]\setminus\{1,-1\}$
$=\underline{]-1,1[}$

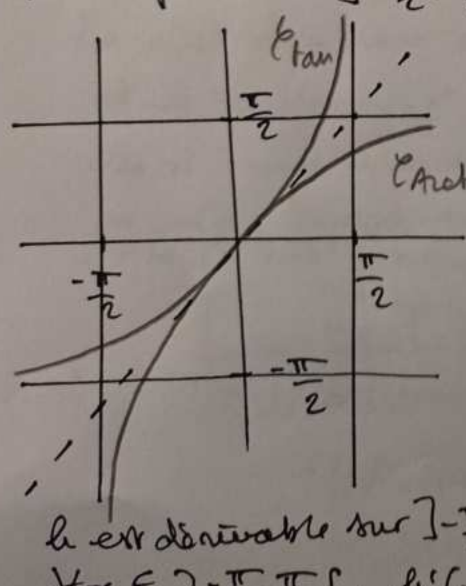
$\forall y\in]-1,1[,\quad (Arccos)'(y)=\dfrac{1}{\cos'(Arccos\,y)}$

Soit $y\in]-1,1[$, $(Arccos)'(y)=\dfrac{1}{-\sin(Arccos\,y)}=\dfrac{-1}{|\sin(Arccos\,y)|}$

Arccos $y\in]0,\pi[$ donc $\sin(Arccos\,y)>0$ et $|\sin(Arccos\,y)|=\sin(Arccos\,y)$

$=\dfrac{-1}{\sqrt{\sin^2(Arccos\,y)}}=\dfrac{-1}{\sqrt{1-\cos^2(Arccos\,y)}}=\boxed{\dfrac{-1}{\sqrt{1-y^2}}}$

② h est strictement croissante et continue sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ donc elle réalise une bijection de $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ vers $]\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}}\tan x,\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\tan x[=]-\infty,+\infty[$.



$\underline{Arctan(0)=0}$ car $\tan 0=0$

$\underline{Arctan(1)=\frac{\pi}{4}}$ car $\tan\frac{\pi}{4}=1$

$\underline{Arctan(-1)=-\frac{\pi}{4}}$ car $\tan(-\frac{\pi}{4})=-1$

$\underline{\lim\limits_{x\to+\infty}Arctan=\frac{\pi}{2}}$ car $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\tan x=+\infty$

$\underline{\lim\limits_{x\to-\infty}Arctan=-\frac{\pi}{2}}$ car $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}}\tan x=-\infty$

h est dérivable sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ car tan est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus(\frac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z})$

$\forall x\in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[,\quad h'(x)=1+\tan^2 x=\dfrac{1}{\cos^2 x}\neq 0.$

Donc Arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$

$\forall y \in \mathbb{R}, \quad \text{Arctan}'(y) = \dfrac{1}{\tan'(\text{Arctan} y)} = \dfrac{1}{1+\tan^2(\text{Arctan} y)}$

$\forall y \in \mathbb{R}, \quad \text{Arctan}'(y) = \dfrac{1}{1+(\tan(\text{Arctan} y))^2} = \boxed{\dfrac{1}{1+y^2}}$

③ ⓐ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{g(x)-g(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0} x \sin \dfrac{1}{x}$.

or $\forall x \in \mathbb{R}^*, -1 \leq \sin \frac{1}{x} \leq 1$

donc $\forall x \in \mathbb{R}^*_+, \ -x \leq x \sin \frac{1}{x} \leq x$

et $\forall x \in \mathbb{R}^*_-, \ -x \geq x \sin \frac{1}{x} \geq x$

Par le théorème des gendarmes, comme $\lim\limits_{x\to 0} x = \lim\limits_{x\to 0} -x = 0$

on obtient que $\lim\limits_{x\to 0^+} x \sin \frac{1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0^-} x \sin \frac{1}{x} = 0$

Ainsi $\lim\limits_{x\to 0} x \sin \frac{1}{x}$ existe et vaut 0 donc g est dérivable en 0 et $g'(0) = 0$

ⓑ La tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0 a pour équation :

$y = g'(0)(x-0) + g(0)$ c'à d $y = 0(x-0) + 0 = 0$ càd $y = 0$

Donc la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0 est l'axe (Ox) (axe des abscisses)

ⓒ g est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^*$: $x \mapsto x^2$ (fonction polynomiale) et $h : x \mapsto \sin \frac{1}{x}$ dérivable sur $\mathbb{R}^*$ en tant que fonction composée.

$\forall x \in \mathbb{R}^*, \ g'(x) = 2x \times \sin \frac{1}{x} + x^2 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) \cos\left(\frac{1}{x}\right)$

En effet $h = u \circ v$ avec $v : x \mapsto \frac{1}{x}$ et $u : x \mapsto \sin x$

et $h' = u' \circ v \times v'$ donc $h'(x) = u'(v(x)) \times v'(x) \ \forall x \in \mathbb{R}^*$

$h'(x) = \cos(v(x)) \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) \ \forall x \in \mathbb{R}^*$

Ainsi $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^* \quad g'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{et } g'(0) = 0.}$

Rq : g est dérivable sur $\mathbb{R}$ mais g n'est pas $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ car g' n'est pas continue en 0 donc g' n'est pas continue sur $\mathbb{R}$.