

Chapitre 7 : Fonctions usuelles

1 Fonctions logarithmes

1.1 Fonction logarithme népérien

Définition 1.

On appelle **logarithme népérien** LA primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ qui s'annule en 1. La fonction logarithme népérien est notée $\ln$. On a donc, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt$$

Le mot logarithme vient du grec "logos" (discours, rapport) et "arithmos" (nombre) et le mot népérien vient de John Napier (1550-1617) ou Neper, mathématicien écossais.

Propriété 1 (Premières propriétés).

- $\ln$ est dérivable (donc continue) sur $]0, +\infty[$ avec $\ln'(x) = \frac{1}{x}$. Elle vérifie $\ln 1 = 0$.
- La fonction $\ln$ est strictement croissante sur $]0, +\infty[$ (puisque sa dérivée est strictement positive).
- Le signe de $\ln x$ est immédiatement fourni par le sens de variation de $\ln$:
 - $\ln x < 0$ équivaut à $0 < x < 1$,
 - $\ln x = 0$ équivaut à $x = 1$,
 - $\ln x > 0$ équivaut à $1 < x$.
- la valeur du nombre dérivé en 1 de la fonction logarithme ($\ln'(1) = 1$) conduit aux résultats suivants :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1 \text{ ou } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1,$$

$$\ln(1+h) = h + h\phi(h), \text{ avec } \lim_{h \rightarrow 0} \phi(h) = 0.$$

Propriétés algébriques

Théorème 1.

Pour tout $x, y \in \mathbb{R}_+^*$, on a

$$\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$$

Remarque 1. Initialement, Neper, Briggs, Wright et Bürgi ont mis au point les premières tables de logarithmes (et d'antilogarithmes) dans le but de simplifier les calculs, devenus d'une grande complexité avec les travaux d'astronomie, de navigation et de commerce au cours du seizième siècle. L'idée directrice de cette simplification réside dans le remplacement des multiplications par des additions.

Propriété 2 (Corollaire).

Pour tout $x, y \in \mathbb{R}_+^*$:

1. $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)$
2. $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$
3. $\forall a \in \mathbb{R}_+^*, \forall n \in \mathbb{Z}, \ln(a^n) = n \ln(a)$

Bijection**Théorème 2.**

La fonction $\ln$ est une bijection (strictement croissante) de $]0; +\infty[$ sur $\mathbb{R}$ et vérifie :

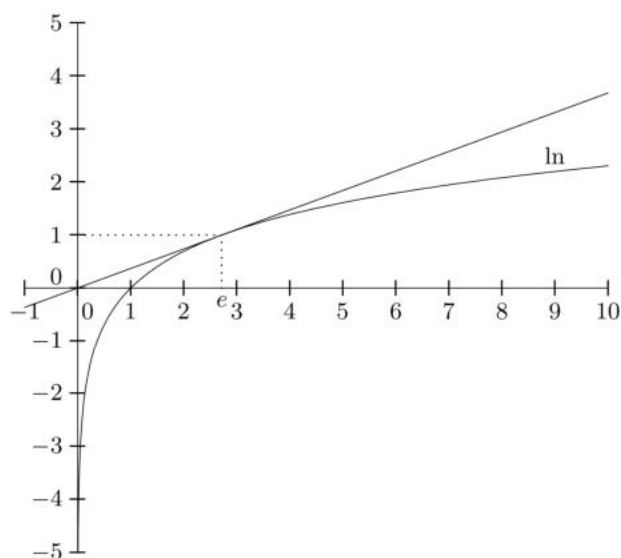
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$$

Remarque 2. — Autrement dit, pour tout réel m , l'équation $\ln x = m$ a une solution unique dans $]0, +\infty[$.
 — e est l'unique réel tel que $\ln(e) = 1$. e est appelé base des logarithmes népériens. Avec un ordinateur, on trouve $e \simeq 2,718281828459045\dots$. De plus, la tangente à la courbe de $\ln$ au point d'abscisse e passe par l'origine.

Limites**Propriété 3.**

1. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$: la courbe représentative de $\ln$ admet l'axe (Oy) comme asymptote.
2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$
3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$: la courbe représentative de $\ln$ admet une branche parabolique de direction (Ox) .

Remarque 3 (Croissance lente). Le comportement asymptotique de $\ln$ peut se traduire ainsi : la courbe finit par s'élever au dessus de toute parallèle à (Ox) .

Représentation graphique

1.2 Logarithme en base 10

Définition 2.

On appelle logarithme en base 10 ou logarithme décimal la fonction

$$\log_{10} : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{\ln(x)}{\ln(10)}$$

Propriété 4.

De la même façon que $\ln$, la fonction $\log_{10}$ vérifie :

1. $\forall x, y \in \mathbb{R}_+^*, \log_{10}(xy) = \log_{10}(x) + \log_{10}(y)$ et $\log_{10}(\frac{x}{y}) = \log_{10}(x) - \log_{10}(y)$
2. $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \forall n \in \mathbb{Z}, \log_{10}(x^n) = n \log_{10}(x)$
3. $\log_{10}$ est une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$.
4. La courbe représentative de la fonction $\log_{10}$ admet les mêmes branches infinies que la courbe représentative de $\ln$.

Applications : diagramme de Bode et calculs de pH.

2 Exponentielle

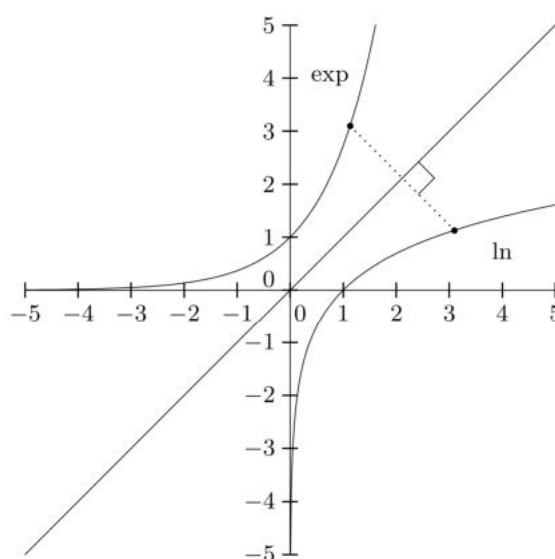
Définition 3.

La fonction exponentielle, notée $\exp$, est la bijection réciproque de la fonction $\ln$. Ainsi :
 $(y = \exp(x) \text{ et } x \in \mathbb{R}) \Leftrightarrow (x = \ln y \text{ et } y > 0)$.

Remarque 4 (Conséquences immédiates). — $\exp$ est définie sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x , $\exp(x) > 0$.

- $\exp(0) = 1$, $\exp(1) = e$, $\exp(-1) = \frac{1}{e}$ car $\ln 1 = 0$, $\ln e = 1$ et $\ln \frac{1}{e} = -1$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\ln(\exp(x)) = x$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\exp(\ln(x)) = x$.
- Les graphes de $\ln$ et de $\exp$ sont symétriques l'un de l'autre par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Représentation graphique



La conservation du contact par une réflexion a pour conséquence que la tangente à $\mathcal{C}_{\ln}$ au point de coordonnées $(1, 0)$ (de pente 1) a pour image la tangente à $\mathcal{C}_{\exp}$ au point de coordonnées $(0, 1)$ (donc de pente 1). Ceci montre que $\exp$ est dérivable en 0 avec $\exp'(0) = 1$.

Propriétés algébriques

Propriété 5.

La fonction $\exp$ vérifie :

1. $\forall x, y \in \mathbb{R}, \exp(x + y) = \exp(x) \exp(y)$ et $\exp(x - y) = \frac{\exp(x)}{\exp(y)}$
2. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z}, \exp(nx) = (\exp(x))^n$

Démonstration : deux réels strictement positifs sont égaux si et seulement s'ils ont même logarithme.

Dérivée

Propriété 6.

La fonction $\exp$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est $\exp$, c'est-à-dire elle-même.

Propriété 7.

La valeur du nombre dérivé en 0 de la fonction $\exp$ conduit aux résultats suivants :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\exp(h) - 1}{h} = 1,$$

$$\exp(h) = 1 + h + h\phi(h), \text{ avec } \lim_{h \rightarrow 0} \phi(h) = 0.$$

Limites

Propriété 8.

1. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp(x) = 0$: la courbe représentative de $\exp$ admet l'axe (Ox) comme asymptote.
2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \exp(x) = +\infty$
3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\exp(x)}{x} = +\infty$: la courbe représentative de $\exp$ admet une branche parabolique de direction (Oy) . La croissance exponentielle est rapide.

Notation e^x Pour tout entier relatif n , $\exp(n) = e^n$ car $\exp(n) = \exp(n \times 1) = (\exp(1))^n = e^n$. De plus, pour des raisons analogues, $\exp \frac{1}{n} = e^{\frac{1}{n}}$.

Par convention, on pose $\exp(x) = e^x$ pour tout réel x . Cette convention est légitime car elle prolonge à tout réel x les égalités obtenues précédemment et que les propriétés algébriques, reformulées avec cette notation, produisent des formules conformes à la notation "puissance" :

Propriété 9.

1. $\forall x, y \in \mathbb{R}, e^{x+y} = e^x \cdot e^y$ et $e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$
2. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z}, e^{nx} = (e^x)^n$

Puissance d'un nombre positif