TD 6 : Complexes

▶ Exercice 1 :
- Résoudre dans $\mathbb{R}$ $\cos x - \sin x = 1$,
- Résoudre dans $\mathbb{R}$ $3\cos x - \sqrt{3}\sin x < \sqrt{3}$.

▶ Exercice 2 : Résoudre l'équation $iz^2 + 4(2+i)z + 3i + 8 = 0$, d'inconnue complexe z.

▶ Exercice 3 : Résoudre l'équation $z^5 = 1$, d'inconnue complexe z. En déduire les solutions de l'équation $z^5 = -4-4i$ et représenter leurs images dans le plan complexe.

▶ Exercice 4 : Résoudre l'équation $z^3 + (4i-2)z^2 + (8i-11)z - 4(16+11i)$, d'inconnue complexe z, sachant qu'elle admet une solution imaginaire pure.

▶ Exercice 5 : Résoudre les équation suivantes d'inconnue complexe z : $\left(3z^2+z+1\right)^2 + \left(z^2+2z+2\right)^2 = 0$ et $z^6 + z^3 + 1 = 0$.

▶ Exercice 6 : Résoudre dans $\mathbb{C}$: $\left(\dfrac{2z+1}{z-1}\right)^4 = 1$, $z^6 = 8i$, $z^6 = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}$ et $\left(z^2+4z+1\right)^2 + (3z+5)^2 = 0$.

▶ Exercice 7 : Montrer que le polynôme x^4+1 se factorise sur l'ensemble des nombres réels en produit de deux polynômes du second degré.

▶ Exercice 8 :

1. Enumérer toutes les racines septièmes de 1.
2. Soit ω une racine septième de 1. Calculer $1+\omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4+\omega^5+\omega^6$ (on distinguera deux cas).
3. Si $\omega \neq 1$, calculer $\dfrac{\omega}{1+\omega^2} + \dfrac{\omega^2}{1+\omega^4} + \dfrac{\omega^3}{1+\omega^6}$.

▶ Exercice 9 : A tout complexe $z \neq 2$, on associe le nombre complexe $Z = \dfrac{z+i}{z-2}$. On définit les parties de $\mathbb{C}$, Γ_1, Γ_2, Γ_3 et Γ_4 par $z \in \Gamma_1 \Leftrightarrow |Z| = 1$, $z \in \Gamma_2 \Leftrightarrow Z$ réel, $z \in \Gamma_3 \Leftrightarrow Z$ imaginaire pur et $z \in \Gamma_2 \Leftrightarrow arg(Z) \equiv \dfrac{\pi}{2}[\pi]$. Représenter graphiquement Γ_1, Γ_2, Γ_3 et Γ_4.

▶ Exercice 10 : Soit $a \in \mathbb{C}^*$. Montrer que le triangle dont les sommets A, B et C ont pouour affixes a, ja et j^2a est équilatéral. On pourra par exemple considérer la rotation r de centre O et d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$.

▶ Exercice 11 : On considère l'équation complexe $E\ :\ z^3 + 6z^2 + 12z + 9 = 0$. On appelle z_1, z_2 et z_3 les racines de E telles que $Im(z_1) = 0$, $Im(z_2) > 0$ et $Im(z_3) < 0$. On note M_1, M_2 et M_3 leurs images respectives. Dire si les énoncés suivants sont vrais ou faux :

1. -3 est solution de E,
2. les points M_1, M_2 et M_3 forment un triangle rectangle,
3. le centre de gravité du triangle $M_1M_2M_3$ est le point d'affixe 4,
4. $\left(\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3}\right) = \dfrac{2\pi}{3}[2\pi]$,
5. $z_1 + jz_2 + j^2z_3 = 0$, où $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$.

▶ Exercice 12 : Soit $ABCD$ un carré direct de centre O, origine du repère et soit a l'affixe du point A.

1. Déterminer en fonction de a les affixes des points B, C et D.

2. t est la translation de vecteur $\overrightarrow{OA}$ et t' est la translation de vecteur $-\overrightarrow{OA}$. E est l'image de D par t et F est l'image de D par t'. Déterminer les affixes de E et F.
3. Montrer que $BE = AF$ et que (BE) est perpendiculaire à (AF).

► Exercice 13 : Dans chaque cas, identifier la transformation plane d'écriture complexe $z \mapsto z'$ et préciser les éléments géométriques qui la caractérisent.

1. $z' = z + i$
2. $z' = 2z + 1 - i$
3. $z' = -z + 2(1 - i)$
4. $z' = -iz + 1$
5. $z' = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(1+i)z$

► Exercice 14 : Soit ABC un triangle rectangle isocèle de sens direct $\left(\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \dfrac{\pi}{2}\right)$ et I le milieu de $[BC]$. Soit S la transformation $R_C \circ T \circ R_B$, où $R_C = r\left(C, \dfrac{\pi}{2}\right)$, $R_B = r\left(B, \dfrac{\pi}{2}\right)$ et $T = t_{\overrightarrow{BC}}$. On rapporte le plan au repère orthonormal direct $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$.

1. Donner l'écriture complexe des transformations R_C, T et R_B.
2. Caractériser alors S.