TD 5

ex 1 : ① f est surjective par définition de $\mathbb{Q}$

f non injective : $f((1,2)) = f((2,4))$ par ex. En effet, $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$

f non bijective

② $x \mapsto \frac{1}{x}$ définit une bijection de $]0,1]$ sur $[1,+\infty[$

③ $f : n \mapsto \begin{cases} 2n & \text{si } n \in \mathbb{N} \\ 2|n|-1 & \text{si } n \in \mathbb{Z}^*_- \end{cases}$

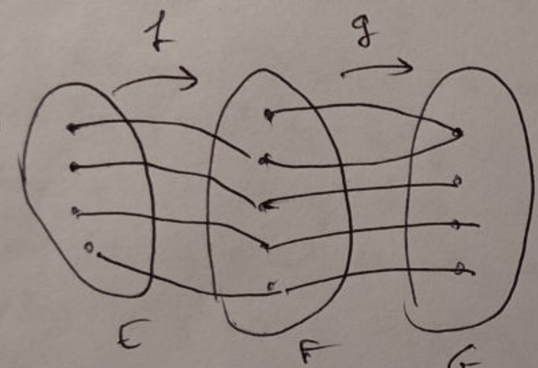
f est bien une application de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{N}$

Si n et p sont de signe contraire alors $f(n)$ et $f(p)$ sont de parité contraire et s'ils ont même signe alors $f(n)=f(p) \Rightarrow 2n=2p$ donc $n=p$. Dans tous les cas $n \neq p \Rightarrow f(n) \neq f(p) \Rightarrow f$ injective

Soit $n \in \mathbb{N}$ si n pair alors $n = f\left(\frac{n}{2}\right)$
si n impair alors $n = f\left(-\frac{n+1}{2}\right)$ $\Big] \Rightarrow n \in f(\mathbb{Z})$ et f surj

Concl : f est une bijection de $\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{N}$.

ex 2 : ①
②



g pas inj

f pas surj

③ $f \circ f = id_E$ et id_E est bij $\Rightarrow \begin{cases} id_E \text{ est inj} \Rightarrow f \text{ inj} \\ id_E \text{ est surj} \Rightarrow f \text{ surj} \end{cases} \Rightarrow f$ surj

ex 3 ① sens réciproque facile

Soit $y \in F$

f surj $\Rightarrow \exists x \in E$ tq $y = f(x)$ et $h(y) = h \circ f(x) = k \circ f(x) = k(y)$

donc $h = k$

② Soit $x \in E$ $h \circ f(x) = h \circ g(x)$ càd $h(f(x)) = h(g(x))$

et h inj donc $f(x) = g(x)$

donc $f = g$

ex 6

① $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dér sur $\mathbb{R}$ $\quad f'(x) = \dfrac{1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} > 0$

f str^t monotone $\Rightarrow$ elle est injective

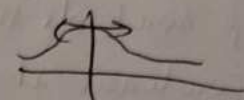
$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sqrt{1+x^2} > \sqrt{x^2} = |x|$ donc $-1 < f(x) < 1 \Rightarrow f$ pas surj

car par ex 2 n'a pas d'antécédent.

f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-1,1[$.

car $f(x) = \dfrac{x}{|x|\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}} \underset{x \to -\infty}{\longrightarrow} -1$, $\underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 1$

② $f(\mathbb{R}) =]0,1]$ $\quad f$ surj. f paire



f pas inj

③ $f \circ f = id$, f est bij car c'est une involution

④ f pas inj $\quad f(1,3) = f(3,1)$ par ex

$(1,3)$ n'a pas d'ant donc f n'est pas surjective.

Rq: $f(\mathbb{R}) = \{(x,x), x \in \mathbb{R}\}$

ex 7 Soient $z \in \mathbb{C}$ et $z' \in \mathbb{C}$. $z R z' \Leftrightarrow |z| = |z'|$

① $\boxed{R}$ Soit $z \in \mathbb{C}$. $|z| = |z|$ donc zRz

$\boxed{S}$ Soit $z \in \mathbb{C}$ Soit $z' \in \mathbb{C}$ tel que zRz'

alors $|z| = |z'|$ donc $|z'| = |z|$ et $z'Rz$

$\boxed{T}$ Soient $z, z', z'' \in \mathbb{C}$ tels que zRz' et $z'Rz''$ Mq zRz''

$\left.\begin{array}{l} zRz' \text{ donc } |z| = |z'| \\ z'Rz'' \text{ donc } |z'| = |z''| \end{array}\right\}$ donc $|z| = |z''|$ et zRz''

Concl: R est réflexive, symétrique et transitive donc c'est une relation d'équivalence sur $\mathbb{C}$

② Soit $z \in \mathbb{C}$

$\mathcal{C}\ell(z) = \{z' \in \mathbb{C} \mid z'Rz\} = \{z' \in \mathbb{C}, |z'| = |z|\}$

$= \{z' \in \mathbb{C}$ tel que $M'(z')$ appartient au cercle de centre O et de rayon $|z|\}$

ex 8 Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. $xRy \Leftrightarrow x^2 - y^2 = x - y$

① $\boxed{R}$ Soit $x \in \mathbb{R}$. $x^2 - x^2 = 0 = x - x$ donc $x^2 - x^2 = x - x$ et xRx

$\boxed{S}$ Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tq xRy

alors $x^2 - y^2 = x - y$ donc $y^2 - x^2 = y - x$ donc yRx

$\boxed{T}$ Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tq xRy et yRz

alors $x^2 - y^2 = x - y$ et $y^2 - z^2 = y - z$

donc $x^2 - z^2 = (x^2 - y^2) + (y^2 - z^2) = x - y + (y - z) = x + (-y + y) - z$

$= x - z$

Concl: R est réflexive, symétrique et transitive donc c'est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$

② Soit $x \in \mathbb{R}$

$\mathcal{C}\ell(x) = \{y \in \mathbb{R} \mid xRy\} = \{y \in \mathbb{R} \mid x^2 - y^2 = x - y\}$

$= \{y \in \mathbb{R} \mid (x-y)(x+y) = x - y\}$

$= \{y \in \mathbb{R} \mid (x-y)(x+y-1) = 0\}$

$= \{y \in \mathbb{R} \mid x = y \text{ ou } y = -x+1\}$

$= \{x, -x+1\}$.