TD4 ex 9 Soit $(a,b) \in \mathbb{R} - \{(0,0)\}$. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $x \mapsto e^{ax} e^{ib}$

① $\mathrm{Re} f : x \mapsto \cos b . e^{ax}$

$\mathrm{Im} f : x \mapsto \sin b . e^{ax}$ car $e^{ib} = \cos b + i \sin b$

$|f| : x \mapsto \sqrt{(\mathrm{Re} f(x))^2 + (\mathrm{Im} f(x))^2}$

Soit $x \in \mathbb{R}$ $|f|(x) = \sqrt{(\cos b . e^{ax})^2 + (\sin b\, e^{ax})^2}$

$= \sqrt{\cos^2 b (e^{ax})^2 + \sin^2 b (e^{ax})^2}$

$= \sqrt{(e^{ax})^2 \underbrace{(\cos^2 b + \sin^2 b)}_{=1}} = |e^{ax}| = e^{ax}$

donc $|f| : x \mapsto e^{ax}$

et $\bar{f} : x \mapsto \cos b e^{ax} - i \sin b e^{ax}$

càd $\bar{f} : x \mapsto e^{ax} e^{-ib}$

② f est dérivable sur $\mathbb{R}$ ssi $\mathrm{Re} f$ et $\mathrm{Im} f$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$.

or $x \mapsto \cos b . e^{ax}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $x \mapsto \sin b\, e^{ax}$ aussi

car $x \mapsto e^{ax}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$ $f'(x) = \mathrm{Re} f'(x) + i\, \mathrm{Im} f'(x)$

$= \cos b . a e^{ax} + i \sin b\, a . e^{ax}$

$= \underline{a e^{ax} e^{ib}}.$

③ Soit $\mathcal{P}(n)$: " f est $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}$ et $f^{(n)} : x \mapsto a^n e^{ax} e^{ib}$ "

Mq $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(n)$ vraie par récurrence.

<u>initialisation</u> : d'après q 2 f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f' : x \mapsto a e^{ax} e^{ib}$

$\mathrm{Re} f'$ et $\mathrm{Im} f'$ sont continues sur $\mathbb{R}$ donc f' aussi donc f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$

Concl : $\mathcal{P}(1)$ est vraie

<u>hérédité</u> : supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour un entier naturel n non nul fixé et mq $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

$f^{(n)} : x \mapsto a^n e^{ax} e^{ib}$ et $f^{(n)}$ est $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}$.

$\mathrm{Re}(f^{(n)}) : x \mapsto a^n e^{ax} \cos b$ et $\mathrm{Im}(f^{(n)}) : x \mapsto a^n e^{ax} \sin b$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et leurs dérivées sont continues sur $\mathbb{R}$ donc $f^{(n)}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f^{(n+1)}$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc f est $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $\mathbb{R}$ et $f^{(n+1)} : x \mapsto a^{n+1} e^{ax} e^{ib} + i\, a^{n+1} e^{ax} e^{ib}$, càd $f^{(n+1)} : x \mapsto a^{n+1} e^{ax} e^{ib}$. Donc $\mathcal{P}(n+1)$ vraie

<u>Conclusion</u> : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(n)$ vraie

④ Reprenons ces questions avec $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$
$x \mapsto e^{ax} e^{ibx}$

- $\mathrm{Re}f : x \mapsto e^{ax} \cos(bx)$ et $\mathrm{Im}f : x \mapsto e^{ax} \sin(bx)$

  $|f| : x \longmapsto \sqrt{(e^{ax})^2 \cos^2(bx) + (e^{ax})^2 \sin^2(bx)}$ or $\forall x \in \mathbb{R}$ $\cos^2(bx) + \sin^2(bx) = 1$
  $|f| : x \longmapsto e^{ax}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$ $|e^{ax}| = e^{ax}$
  $\overline{f} : x \mapsto e^{ax} \cos(bx) - i e^{ax} \sin(bx)$
  $\overline{f} : x \mapsto e^{ax} e^{-ibx}$

- f est dérivable sur $\mathbb{R}$ car Ref et Imf le sont en tant que produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$

  Soit $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \mathrm{Re}f'(x) + i\,\mathrm{Im}f'(x) =$
  $= ae^{ax} \cos(bx) - be^{ax} \sin(bx) + i\left(ae^{ax} \sin(bx) + be^{ax} \cos(bx)\right)$
  $= (a+ib)e^{ax} \cos(bx) + i\,(a+ib)e^{ax} \sin(bx)$
  $= (a+ib)\, e^{ax} \left(\cos(bx) + i \sin(bx)\right) = (a+ib)e^{ax} e^{ibx}$
  $= \underline{\alpha f(x)}.$

- Soit $\mathcal{P}(n)$: " f est $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}$ et $f^{(n)} : x \mapsto \alpha^n e^{ax} e^{ibx}$ "

  Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(n)$ vraie par récurrence.
  <u>Initialisation</u> : d'après ce qui précède, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f' = \alpha f$
  Comme f est dérivable sur $\mathbb{R}$, f est continue sur $\mathbb{R}$ donc $f' = \alpha f$ est continue sur $\mathbb{R}$. Conclusion : f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $\mathcal{P}(1)$ est vraie.
  <u>Hérédité</u> : Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour un entier naturel n non nul fixé et mq $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
  $f^{(n)} : x \mapsto \alpha^n e^{ax} e^{ibx}$ et $f^{(n)}$ est $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}$.
  $\mathrm{Re}(f^{(n)}) : x \mapsto \alpha^n e^{ax} \cos(bx)$ et $\mathrm{Im}(f^{(n)}) : x \mapsto \alpha^n e^{ax} \sin(bx)$
  sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et leurs dérivées sont continues sur $\mathbb{R}$
  donc $f^{(n)}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f^{(n+1)}$ est continue sur $\mathbb{R}$
  donc f est $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $\mathbb{R}$ et pour tout x réel :
  $f^{(n+1)}(x) = \left(\mathrm{Re}(f^{(n)})\right)'(x) + i\left(\mathrm{Im}(f^{(n)})\right)'(x)$
  $= \alpha^n a e^{ax} \cos bx + \alpha^n e^{ax}(-b \sin(bx)) + i\left(\alpha^n a e^{ax} \sin(bx) + \alpha^n e^{ax} b\cos(bx)\right)$
  $= (a+ib)\alpha^n e^{ax} \cos bx + i(a+ib)\alpha^n e^{ax} \sin bx.$
  $= (a+ib)\alpha^n e^{ax}\left(\cos(bx) + i \sin(bx)\right) = \alpha \cdot \alpha^n e^{ax} e^{ibx}$
  $= \alpha^{n+1} e^{ax} e^{ibx}.$ Ainsi $\mathcal{P}(n+1)$ vraie

  <u>Concl</u> : $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\mathcal{P}(n)$ vraie