Exercice 1

(1) $x \mapsto x^2-x-1$ et exp sont définies sur $\mathbb{R}$ donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x)$ existe et $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.
f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.
Soit $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = (2x-1)e^{x^2-x-1}$ (forme e^u ; $(e^u)' = u'e^u$ avec $u : x \mapsto x^2-x-1$)

x	$-\infty$	0	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$		0	$+$
$f(x)$	$+\infty \searrow$	e^{-1}	$e^{-\frac{5}{4}}$	$\nearrow +\infty$

$f\left(\frac{1}{2}\right) = e^{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}-1} = e^{-\frac{5}{4}}$

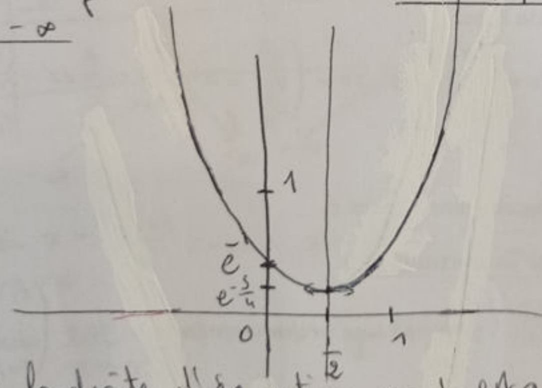
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{x^2-x-1} = \lim\limits_{u\to+\infty} e^u = +\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} x^2-x-1 = \lim\limits_{x\to-\infty} x^2\left(1-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right) = +\infty$

donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{u\to+\infty} e^u = +\infty$.

Etude des branches infinies

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^{x^2-x-1}}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4}}}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2} e^{-\frac{5}{4}}}{x\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$
$= \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2} e^{-\frac{5}{4}} \frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}{x}$
or $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2-x+\frac{1}{4}}{x} = \cancel{-\infty}$
$\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{y\to+\infty} \frac{e^y}{y} = +\infty$ par croissances comparées (CC)
donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ et $\mathcal{C}_f$ admet une branche parabolique de direction asymptotique (Oy) en $+\infty$.
- $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{e^{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2} e^{-\frac{5}{4}} \frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}{x} = -\infty$ car $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}{x} = -\infty$
donc $\mathcal{C}_f$ admet aussi une branche parabolique de direction asymptotique (Oy) en $-\infty$



- Rq : la droite d'équation $x = \frac{1}{2}$ est axe de symétrie de $\mathcal{C}_f$
En effet, pour tout $h \in \mathbb{R}$, $f\left(\frac{1}{2}+h\right) = f\left(\frac{1}{2}-h\right)$.
$f\left(\frac{1}{2}+h\right) = e^{\left(\frac{1}{2}+h\right)^2-\left(\frac{1}{2}+h\right)-1} = e^{\frac{1}{4}+h^2+h-\frac{1}{2}-h-1} = e^{-\frac{5}{4}+h^2}$
$f\left(\frac{1}{2}-h\right) = e^{\left(\frac{1}{2}-h\right)^2-\left(\frac{1}{2}-h\right)-1} = e^{\frac{1}{4}+h^2-h-\frac{1}{2}+h-1} = e^{-\frac{5}{4}+h^2}$
- Etude de convexité : f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f''(x) \geq 0$
car $f''(x) = 2e^{x^2-x-1} + (2x-1)^2 e^{x^2-x-1} = \left(2+(2x-1)^2\right)e^{x^2-x-1}$. f est convexe sur $\mathbb{R}$

Exercice 1

② Si $x \in \mathbb{R}_*^+$, $g(x) = x + \frac{\ln x}{x}$. Si $x \in \mathbb{R}_*^-$, $g(x) = x + \frac{\ln(-x)}{-x} = x - \frac{\ln(-x)}{x}$

Soit $x \in \mathbb{R}$, $g(x)$ existe ssi $x \neq 0$ donc $D_g = \mathbb{R}^*$

Sur $\mathbb{R}_*^+$ et sur $\mathbb{R}_*^-$ g est dérivable en tant que quotient défini et somme de fonctions dérivables.

Soit $x > 0$. $g'(x) = 1 + \frac{\frac{1}{x} \times x - \ln x}{x^2} = \frac{x^2 + 1 - \ln x}{x^2}$

Soit $x < 0$ $g'(x) = 1 - \frac{\frac{-1}{-x} \times x - \ln(-x)}{x^2} = \frac{x^2 - 1 + \ln(-x)}{x^2}$

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $\forall x > 0$, $h(x) = x^2 + 1 - \ln x$

h est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall x > 0$, $h'(x) = 2x - \frac{1}{x} = \frac{1}{x}(2x^2 - 1)$

x	0		$\frac{1}{\sqrt{2}}$		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$		$\searrow$	$h(\frac{1}{\sqrt{2}})$	$\nearrow$	

$h\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2} + 1 - \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2}\ln 2 > 0$.

Conclusion : sur $\mathbb{R}_*^+$, g' est positive

Soit i la fonction définie sur $\mathbb{R}_-^*$ par : $\forall x < 0$, $i(x) = x^2 - 1 + \ln(-x)$.

i est dérivable sur $\mathbb{R}_-^*$ et $\forall x < 0$, $i'(x) = 2x + \frac{-1}{-x} = 2x + \frac{1}{x} = \frac{1}{x}(2x^2 + 1)$

x	$-\infty$		-1		0
$i'(x)$		$-$		$-$	
$i(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

$\lim\limits_{x \to 0^-} i(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} x^2 - 1 + \ln(-x) = -1 + \lim\limits_{y \to 0^+} \ln(y) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} i(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} x^2 - 1 + \ln(-x) = \lim\limits_{x \to -\infty} x^2 + \lim\limits_{x \to -\infty} \ln(-x) = +\infty$

et on remarque que $h(-1) = 0$

On obtient donc le tableau de variations suivant pour g :

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	$\|$	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$ $-\infty$	$\|$	$-\infty$ $\nearrow$	$+\infty$

$g(-1) = -1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ car $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ par CC

$\lim\limits_{x \to 0} g(x) = -\infty$ car $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{x} = -\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} x - \frac{\ln(-x)}{x} = -\infty$ car $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{\ln(-x)}{-x} = \lim\limits_{u \to +\infty} \frac{\ln u}{u} = 0$ par CC.

Comme $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = -\infty$, $\mathcal{C}_g$ admet la droite d'équation $x = 0$ comme asymptote verticale en 0.

Etude des branches infinies en $\pm\infty$

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} 1 + \frac{\ln x}{x^2} = 1 + \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} \times \frac{\ln x}{x} = 1$ car $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} \times \frac{\ln x}{x} = 0$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) - 1x = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ Donc $\mathcal{C}_g$ admet la droite Δ d'équation $y = 1x + 0$ càd $y = x$ comme asymptote en $+\infty$.

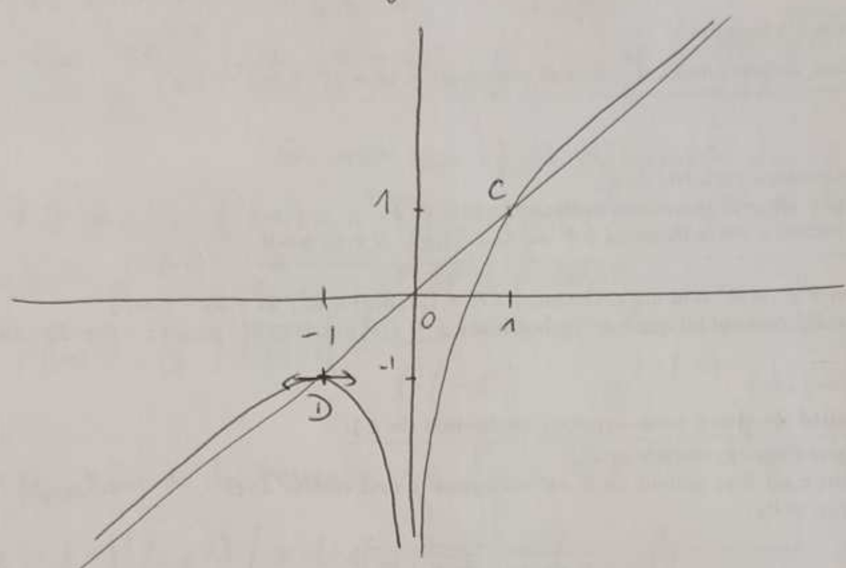
Position relative de $\mathcal{C}_g$ par rapport à Δ :

Soit $x>0$ $g(x)-x=\frac{\ln x}{x}$. lorsque $x>1$, $\frac{\ln x}{x}>0$ donc $\mathcal{C}_g$ est au dessus de Δ sur $]1,+\infty[$. $\mathcal{C}_g$ coupe Δ en $C(1,1)$

• $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{g(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty} 1 - \frac{\ln(-x)}{x^2} = 1$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)-x = \lim\limits_{x\to-\infty} -\frac{\ln(-x)}{x}=0$

donc $\mathcal{C}_g$ admet la droite Δ comme asymptote en $-\infty$ aussi.

Soit $x<0$, $g(x)-x = -\frac{\ln(-x)}{x}$. lorsque $x<-1$, $\frac{\ln(-x)}{-x}>0$ donc $\mathcal{C}_g$ est au dessous de Δ sur $]-\infty,-1[$. $\mathcal{C}_g$ coupe Δ en $D(-1,-1)$



• Etude de la convexité de g : g' est dérivable sur $\mathbb{R}^*$

Soit $x>0$, $g''(x)=\dfrac{(2x-\frac{1}{x})x^2-(x^2+1-\ln x)\cdot 2x}{x^4}$

$g''(x)=\dfrac{x[2x^2-1-2x^2-2+2\ln x]}{x^4}=\dfrac{-3+2\ln x}{x^3}$

$g''(x)<0$ ssi $-3+2\ln x<0$ ssi $\ln x<\frac{3}{2}$ ssi $x<e^{3/2}$

Soit $x<0$, $g''(x)=\dfrac{(2x+\frac{1}{x})x^2-(x^2-1+\ln(-x))2x}{x^4}=\dfrac{x[2x^2+1-2x^2+2-2\ln(-x)]}{x^4}$

$g''(x)=\dfrac{3-2\ln(-x)}{x^3}$

$g''(x)<0$ ssi $3-2\ln(-x)>0$

ssi $-2\ln(-x)>-3$

ssi $\ln(-x)<\frac{3}{2}$

ssi $-x<e^{\frac{3}{2}}$

ssi $x>-e^{3/2}$

Conclusion :

g est convexe sur $]-\infty,-e^{3/2}[$ et sur $]e^{3/2},+\infty[$, et concave sur $]-e^{3/2},0[$ et sur $]0,e^{3/2}[$ et $A(e^{3/2},g(e^{3/2}))$ est un point d'inflexion $B(-e^{3/2},g(-e^{3/2}))$ aussi !

Exercice 2

① f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables

En particulier, pour $x \in]-\infty, 1[$, on a :

$f'(x) = e^{1-x} + x(-1)e^{1-x} = e^{1-x}(1-x) > 0$

f est donc strictement croissante sur $]-\infty, 1[$ et comme elle est dérivable, elle est aussi continue sur $]-\infty, 1[$.

Elle réalise donc une bijection de $]-\infty, 1[$ vers $f(]-\infty, 1[)$

avec $f(]-\infty,1[) =]\lim\limits_{x \to -\infty} f(x), \lim\limits_{x \to 1} f(x)[= \underline{]-\infty, 1[= J}$

car $\lim\limits_{x \to -\infty} x e^{1-x} = \lim\limits_{x \to -\infty} x \times \lim\limits_{x \to -\infty} e^{1-x} = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to 1} e^{1-x} = \lim\limits_{u \to 0} e^{u} = 1$

② On sait que f est dérivable sur $]-\infty, 1[$ et $\forall x \in]-\infty, 1[$, $f'(x) = e^{1-x}(1-x) \neq 0$ donc f^{-1} est dérivable sur J

③ $f(-1) = -1\, e^{1-(-1)} = -e^2$.

d'après le cours

$$(f^{-1})'(-e^2) = (f^{-1})'(f(-1)) = \frac{1}{f'(-1)} = \frac{1}{e^{1-(-1)}(1-(-1))} = \frac{1}{e^2 \times 2}$$

L'équation de la tangente à $\mathcal{C}_{f^{-1}}$ au point d'abscisse $-e^2$ est :

$$y = (f^{-1})'(-e^2)(x-(-e^2)) + f^{-1}(-e^2) = \frac{1}{2e^2}(x+e^2) + (-1)$$

car $f(-1) = -e^2$ ssi $-1 = f^{-1}(-e^2)$.

càd $\boxed{y = \frac{x}{2e^2} + \frac{1}{2} - 1 = \frac{x}{2e^2} - \frac{1}{2}}$

Exercice 3

① Étudier la régularité de f c'est déterminer sa classe sur son ensemble de définition : ici $\mathbb{R}$.

- f est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$ et sur $\mathbb{R}^{-*}$ en tant que fonctions polynomiales et f est continue en 0 car $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) =$ (le vérifier)
  Donc f est continue sur $\mathbb{R}$, càd f est $\mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}$.
- f est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et sur $\mathbb{R}^{-*}$ en tant que fonctions polynomiales
  si $x>0$, $f'(x) = 3x^2$ et si $x<0$, $f'(x) = 2x$.
  f est-elle dérivable en 0 ?
  $\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^3-0^3}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} x^2 = 0$ donc f est dér à droite en 0 et $f'_d(0)=0$
  $\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{x^2-0^3}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} x = 0$ donc f est dér à gauche en 0 et $f'_g(0)=0$
  et $f'_d(0) = f'_g(0) = 0$ donc f est dérivable en 0 et $f'(0)=0$.
  Conclusion : f est dérivable sur $\mathbb{R}$
- De plus $\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} 3x^2 = 0$ et $\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} 2x = 0$ donc
  $\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} f'(x) = f'(0)$ donc f' est continue sur $\mathbb{R}$ donc
  f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
- f' est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et sur $\mathbb{R}^{-*}$ en tant que fonctions polynomiales
  si $x>0$ $f''(x) = 6x$ et si $x<0$, $f'(x) = 2$
  f' est-elle dérivable en 0 ?
  $\lim_{x\to 0^+} \frac{f'(x)-f'(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{3x^2-0}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} 3x = 0$ donc f' est dér à droite en 0 et $f'_d(0) = 0$
  $\lim_{x\to 0^-} \frac{f'(x)-f'(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{2x-0}{x-0} = 2$ donc f' est dér à gauche en 0 et $f'_g(0) = 2$
  $f'_d(0) \neq f'_g(0)$ donc f' n'est pas dér en 0 donc f' n'est pas dér sur $\mathbb{R}$

CONCL : f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ mais pas $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

②ⓐ Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1,+1\}$, $\frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1} = \frac{a(x+1)+b(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{(a+b)x + (a-b)}{x^2-1}$.
Si $a+b=0$ et $a-b=1$ alors $\frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1} = \frac{1}{x^2-1}$.
Or $\begin{cases} a+b=0 \\ a-b=1 \end{cases}$ ssi $\begin{cases} a=-b \\ -2b=1 \end{cases}$ ssi $\begin{cases} a=-b \\ b=-\frac{1}{2} \end{cases}$ Conclusion : $\boxed{a=\frac{1}{2} \text{ et } b=-\frac{1}{2} \text{ Conviennent}}$

②ⓑ $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-1,+1\}$, $g(x) = \frac{\frac{1}{2}}{x-1} + \frac{-\frac{1}{2}}{x+1}$.
g est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{-1,+1\}$ en tant que somme de deux fractions rationnelles. Posons, pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$, $h(x) = \frac{1}{2}\frac{1}{x-1}$ et pour tout $x\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$, $i(x) = -\frac{1}{2}\frac{1}{x+1}$.
Soit $n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$, $h^{(n)}(x) = \frac{1}{2} \times \frac{(-1)^n n!}{(x-1)^{n+1}}$ et
$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$, $i^{(n)}(x) = -\frac{1}{2}\frac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}}$. Ainsi, on obtient :
$\forall n \in \mathbb{N}\ \forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-1,+1\}$, $\boxed{g^{(n)}(x) = \frac{1}{2}(-1)^n n! \left(\frac{1}{(x-1)^{n+1}} - \frac{1}{(x+1)^{n+1}}\right)}$

③ ⓐ Soit $n \in \mathbb{N}$. $\mathcal{P}(n)$: " f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}$ et il existe une fonction polynomiale P_n telle que $\forall x \in \mathbb{R},\ f^{(n)}(x) = \dfrac{P_n(x)}{(1+x^2)^{n+\frac{1}{2}}}$. "

Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}$ $\mathcal{P}(n)$ vraie

- initialisation : f est continue sur $\mathbb{R}$ en tant que composée de fonctions continues.
$\forall x \in \mathbb{R}$ $f^{(0)}(x) = f(x) = \dfrac{1}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{P_0(x)}{(1+x^2)^{0+\frac{1}{2}}}$ où $P_0 : x \longmapsto 1$ est une fonction polynomiale

- hérédité : supposons que pour un n fixé ($n \in \mathbb{N}$), $\mathcal{P}(n)$ vraie.
Mq $\mathcal{P}(n+1)$ vraie.
D'après HR, f est $\mathcal{C}^n$ et $\forall x \in \mathbb{R}$ $f^{(n)}(x) = \dfrac{P_n(x)}{(1+x^2)^{n+\frac{1}{2}}}$
$f^{(n)}$ est dérivable en tant que quotient de fcts dérivables

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \left(f^{(n)}\right)'(x) = \frac{P'_n(x)(1+x^2)^{n+\frac{1}{2}} - P_n(x)\left(n+\frac{1}{2}\right)(1+x^2)^{n-\frac{1}{2}} \times 2x}{\left((1+x^2)^{n+\frac{1}{2}}\right)^2}$$

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f^{(n+1)}(x) = \frac{P'_n(x)(1+x^2)\cancel{(1+x^2)^{n-\frac{1}{2}}} - P_n(x)\left(n+\frac{1}{2}\right)\cancel{(1+x^2)^{n-\frac{1}{2}}} \times 2x}{\cancel{(1+x^2)^{n-\frac{1}{2}}}(1+x^2)(1+x^2)^{n+\frac{1}{2}}}$$

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f^{(n+1)}(x) = \frac{P'_n(x)(1+x^2) - P_n(x)\left(n+\frac{1}{2}\right) \times 2x}{(1+x^2)^{n+\frac{3}{2}}}$$

Posons $P_{n+1} : x \longmapsto P'_n(x)(1+x^2) - P_n(x)\left(n+\frac{1}{2}\right) \times 2x$

alors P_{n+1} est une fonction polynomiale car P_n est une fonction polynomiale donc P'_n également et $x \mapsto 1+x^2$ et $x \mapsto 2x$ aussi.
et on a : $\forall x \in \mathbb{R},\ f^{(n+1)}(x) = \dfrac{P_{n+1}(x)}{(1+x^2)^{(n+1)+\frac{1}{2}}}$ donc $\mathcal{P}(n+1)$ vraie

- Concl : $\forall n \in \mathbb{N}$ $\mathcal{P}(n)$ vraie

ⓑ on a montré dans l'hérédité que :

$\forall x \in \mathbb{R},\quad P_{n+1}(x) = P'_n(x)(1+x^2) - 2P_n(x)\left(n+\frac{1}{2}\right)x$, càd

$\forall x \in \mathbb{R},\quad P_{n+1}(x) = P'_n(x)(1+x^2) - xP_n(x)(2n+1)$