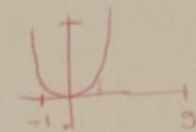
INTERRO MPSI le 4 NOVEMBRE 2024 NOM :

/20

① Soit f une application de E dans F. Définition de l'image directe d'une partie A de E : $f(A) = \{f(x), x \in A\}$

/0,5

② Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$. Soit $A_2 = [-1, 9]$



$f(A_2) = [0, 81]$

/1 $f^{-1}(A_2) = [-3, 3]$

③ Définition d'une relation d'ordre définie sur un ensemble E

c'est une rel binaire R A T //

/1,5 Dans quel cas dit-on que l'ordre est total ? lq $\forall (x,y) \in E^2$, xRy ou yRx

④ Définition du plus grand élément de A, où A est une partie de $\mathbb{R}$

/0,5 c'est un majorant qui est un élt de A lq il existe

⑤ La droite $D : x = a$ dans le repère R est un axe de symétrie de $\mathcal{C}_f$ ssi ....

/1 $\forall h \in \mathbb{R}$ tq $a-h \in \mathcal{D}_f$, $a+h \in \mathcal{D}_f$, et $f(a-h) = f(a+h)$

⑥ Que dire de $\mathcal{C}_f$ lorsque $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$?

/1 $\mathcal{C}_f$ admet une branche para de dir (Oy) en $+\infty$

⑦ Que dire de $\mathcal{C}_f$ lorsque $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$

/1 $\mathcal{C}_f$ admet la droite d'éq $y = 0$ comme asymptote en $-\infty$

8) Soient z_1 et z_2 les 2 racines, éventuellement confondues, du polynôme $aX^2 + bX + c$. Que vaut $z_1 + z_2$? $z_1 + z_2 = -\frac{b}{a}$

/0,5

9) Donnez les 5 racines cinquièmes de l'unité : 1 $e^{\frac{2i\pi}{5}}$ $e^{\frac{4i\pi}{5}}$ $e^{\frac{6i\pi}{5}}$ $e^{\frac{8i\pi}{5}}$ //

Que vaut leur somme S ? leur produit P ? $S = 0$, $P = 1$

(résultats à donner sans justification)

/3 Que dire de leurs points images dans le plan complexe ?

Elles forment un pentagone régulier, inscrit dans le cercle unité

10) Dans le plan muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$ on pose $A(z_A)$, $B(z_B)$, $C(z_C)$ et $D(z_D)$. On suppose $A \neq B$ et $C \neq D$.

/1 $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) \equiv \alpha\ [2\pi]$ ssi $\arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) \equiv \alpha\ [2\pi]$

B est le milieu de $[AC]$ ssi ... $z_B = \frac{1}{2}(z_A + z_C)$

11) Soit $b \in \mathbb{C}$ et $k \in \mathbb{R}^* \setminus \{1\}$. La transformation plane dont l'écriture

/1,5 complexe est : $z' = kz + b$ est une homothétie, de centre d'affixe $\frac{b}{1-k}$ et de rapport k

(12) Déterminer les limites suivantes :

/1,5 $\lim\limits_{h \to 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$, $\lim\limits_{x \to -\infty} \exp(x) = 0$

(13) Définition de $\ln x$, pour $x > 0$, à l'aide d'une intégrale

$\ln x = \int_1^x \frac{dt}{t}$

/0,5

(14) Résoudre $z^3 = e^{-\frac{2i\pi}{3}}$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$

On ne demande pas de simplifier les résultats

$z = e^{\frac{2i\pi}{9}}$ est solution

/1,5

Les autres solutions sont $\overbrace{e^{-\frac{2i\pi}{9}} \times e^{\frac{2i\pi}{3}}}^{= e^{\frac{4i\pi}{9}}}$ et $\overbrace{e^{-\frac{2i\pi}{9}} \times e^{\frac{4i\pi}{3}}}^{= e^{\frac{10i\pi}{9}}}$

(on multiplie une solution par les racines cubiques de 1)

(15) Soit $f : x \mapsto \sin^2 x$. Etablir une relation entre les fonctions f et f''

f est dér sur $\mathbb{R}$ en tt que produit,

$f' : x \mapsto 2 \sin x \cos x$, f' est dér sur $\mathbb{R}$ en tt que produit

$f'' : x \mapsto 2(\cos^2 x - \sin^2 x)$,

/2

$f'' : x \mapsto 2(1 - 2\sin^2 x)$

D'où $f''(x) = 2 - 4\sin^2 x = 2 - 4f(x)$,

$$f'' = 2 - 4f$$

(16) Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on pose $x \mathcal{R} y \iff x^2 - y^2 = x - y$

On admet que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$.

/2

Déterminer la classe d'équivalence de x.

$Cl(x) = \{ y \in \mathbb{R} \text{ tq } x \mathcal{R} y \}$, $= \{ y \in \mathbb{R} \mid x^2 - y^2 = x - y \}$

$= \{ y \in \mathbb{R} \mid (x-y)(x+y) = x - y \}$,

$= \{ y \in \mathbb{R} \mid (x-y)(x+y-1) = 0 \}$,

$= \{ y \in \mathbb{R} \mid y = x \text{ ou } y = 1 - x \}$

$= \{ x, 1-x \}$,

INTERRO MPSI le 4/11/24 NOM: /20

① Soit f une application de E dans F. Définition de l'image réciproque d'une partie B de F par f : $f^{-1}(B) = \{ x \in E \mid f(x) \in B \}$ /0,5

② Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$. Soit $A_1 = [-2, 4]$.

$f(A_1) = [0, 16]$

/1 $f^{-1}(A_1) = [-2, 2]$

③ Définition d'une relation d'équivalence définie sur un ensemble E :

c'est une relation binaire RST

/1,5 Soit $x \in E$, $\mathcal{Cl}(x) = \{ y \in E \mid x R y \}$

④ Définition du plus petit élément de A, où A est une partie de $\mathbb{R}$

/0,5 c'est un minorant qui appartient à A

⑤ le point de coordonnées (a, b) dans le repère R est un centre de symétrie de $\mathcal{C}_f$ ssi... $\forall h \in \mathbb{R}$ tq $a-h \in \mathcal{D}f$, $a+h \in \mathcal{D}f$ et $f(a+h) + f(a-h) = 2b$ /1

=1

⑥ Que dire de $\mathcal{C}_f$ lorsque $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$?

/1 $\mathcal{C}_f$ admet une branche par de dir as (Ox) en $-\infty$

⑦ Que dire de $\mathcal{C}_f$ lorsque $\lim_{x \to 0} f(x) = -\infty$

/1 $\mathcal{C}_f$ admet la droite d'éq $x = 0$ comme asymptote en 0.

⑧ Soient z_1 et z_2 les 2 racines, éventuellement confondues, du polynôme $aX^2 + bX + c$. Que vaut $z_1 z_2$? $\frac{c}{a}$ /0,5

⑨ Donnez les 6 racines sixièmes de l'unité: $1, e^{\frac{2i\pi}{6}}, e^{\frac{4i\pi}{6}}, -1, e^{\frac{8i\pi}{6}}, e^{\frac{10i\pi}{6}}$

Que vaut leur somme S? leur produit P ? $S = 0$ $P = -1$

/3 (résultats à donner sans justification)

Que dire de leurs points images dans le plan complexe ?

Ils forment un hexagone régulier inscrit dans un cercle

⑩ Dans le plan muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ on pose $A(z_A)$, $B(z_B)$, $C(z_C)$ et $D(z_D)$

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ ssi... $z_B - z_A = z_D - z_C$

/1 $AB = CD$ ssi... $|z_B - z_A| = |z_D - z_C|$

⑪ Soit $b \in \mathbb{C}$ et $a \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ tel que $|a| = 1$. La transformation plane dont l'écriture complexe est: $z' = az + b$ est .. la rotation de centre $\frac{b}{1-a}$ et d'angle un argument de a. /1,5

(12) Déterminez les limites suivantes :

/1,5 $\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1} = 1$, $\lim_{h\to 0}\frac{\exp(-h)-1}{h} = 1$, $\lim_{x\to +\infty}\frac{\exp(x)}{x} = +\infty$

(13) Définition de $\log_{10}(x)$ pour $x \in \mathbb{R}_+^*$ $\quad \log_{10}(x) = \frac{\ln(x)}{\ln 10}$

/0,5

(14) Résoudre $z^3 = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$. Ne pas simplifier les résultats

Une sol est $z = e^{\frac{2i\pi}{9}}$

/1,5 les autres sont $\overbrace{e^{\frac{2i\pi}{9}} e^{\frac{2i\pi}{3}}}^{e^{\frac{8i\pi}{9}}}$ et $\overbrace{e^{\frac{2i\pi}{9}} e^{\frac{4i\pi}{3}}}^{e^{\frac{14i\pi}{9}}}$

(On multiplie une solution avec les racines cubiques de 1)

(15) Résoudre dans $\mathbb{R}$: $\lfloor \sqrt{x^2+1} \rfloor = 2$

Soit $x \in \mathbb{R}$

$\lfloor \sqrt{x^2+1} \rfloor = 2$ ssi $2 \le \sqrt{x^2+1} < 3$

/2 ssi $4 \le x^2+1 < 9$

ssi $3 \le x^2$ et $x^2 < 8$

ssi $3 \le x^2 < 8$ ssi $\sqrt{3} \le \sqrt{x^2} < \sqrt{8}$

ssi $\sqrt{3} \le |x| < \sqrt{8}$ ssi $\sqrt{3} \le x < \sqrt{8}$ ou $\sqrt{3} \le -x < \sqrt{8}$

ssi $x \in [\sqrt{3}, \sqrt{8}[\cup]-\sqrt{8}, -\sqrt{3}]$

(16) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x,y) \mapsto \left(\frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2}\right)$

Étudiez l'injectivité et la surjectivité éventuelle de f

justifiez vos résultats

/2 f n'est pas inj, car $f(1,3) = f(2,2)$

f n'est pas surj car $(1,2)$ n'a pas d'antécédent par f dans $\mathbb{R}^2$