TD6 ex 6 Soit $z \in \mathbb{C} - \{1\}$

- $\left(\frac{2z+1}{z-1}\right)^4 = 1$ ssi $\frac{2z+1}{z-1}$ est racine 4^e de 1

ssi $\frac{2z+1}{z-1} = 1$ ou $\frac{2z+1}{z-1} = i$ ou $\frac{2z+1}{z-1} = -1$ ou $\frac{2z+1}{z-1} = -i$

ssi $2z+1 = z-1$ ou $2z+1 = i(z-1)$ ou $2z+1 = -z+1$ ou $2z+1 = -i(z-1)$

ssi $z = -2$ ou $z(2-i) = -i-1$ ou $3z = 0$ ou $(2+i)z = i-1$

$S = \left\{-2, \frac{-i-1}{2-i}, 0, \frac{i-1}{2+i}\right\}$

- On reconnaît ici l'éq $z^n = z_0$ avec $z_0 = 8i = 8e^{\frac{i\pi}{2}}$ et $n = 6$

D'après le cours, $S = \left\{\sqrt[6]{8} \cdot e^{\frac{\frac{i\pi}{2} + 2ik\pi}{6}}, k \in [\![0,5]\!]\right\}$

- On reconnaît ici l'éq $z^n = z_0$ avec $z_0 = \frac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i} = \frac{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i}{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i} = \frac{e^{\frac{i\pi}{3}}}{e^{-\frac{i\pi}{3}}}$

càd $z_0 = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. D'après le cours,

$S = \left\{\sqrt[6]{1}\, e^{\frac{\frac{i2\pi}{3} + 2ik\pi}{6}}, k \in [\![0,5]\!]\right\}$

- $(z^2+4z+1)^2 + (3z+5)^2 = 0$ ssi $(z^2+4z+1)^2 - (-1)(3z+5)^2 = 0$

ssi $(z^2+4z+1)^2 - i^2(3z+5)^2 = 0$ ssi $(z^2+4z+1)^2 - (3iz+5i)^2 = 0$

ssi $[(z^2+4z+1) + (3iz+5i)][(z^2+4z+1) - (3iz+5i)] = 0$

ssi $\underbrace{z^2 + (4+3i)z + (1+5i) = 0}_{(E_1)}$ ou $\underbrace{z^2 + (4-3i)z + 1 - 5i = 0}_{(E_2),\text{ éq conjuguée de } (E_1)}$

Résolvons (E_1) :

$\Delta = (4+3i)^2 - 4\times1\times(1+5i) = 16 + 24i - 9 - 4 - 20i = 3 + 4i$

les racines carrées de Δ sont $2+i$ et $-2-i$.

Donc les racines de (E_1) sont : $\frac{-(4+3i)+2+i}{2}$ et $\frac{-(4+3i)-2-i}{2}$,

soit $-1-i$ et $-3-2i$

Les racines de (E_2) sont $-1+i$ et $-3+2i$

Concl : $S = \{-1-i, -3-2i, -1+i, -3+2i\}$.