Partie A

① $x \mapsto e^x$ et $x \mapsto e^{-x}$ sont définies sur $\mathbb{R}$ donc $f$ et $g$ également

② Soit $x \in \mathbb{R}$ $f(-x) = \frac{e^{-x}+e^{-(-x)}}{2} = \frac{e^{x}+e^{-x}}{2} = f(x)$ et $g(-x) = \frac{e^{-x}-e^{-(-x)}}{2} = -\frac{e^{x}-e^{-x}}{2} = -g(x)$
et $\mathbb{R}$ est centré en 0 donc <u>$f$ est paire et $g$ impaire</u>

③ Soit $x \in \mathbb{R}$ $e^x > 0$ et $e^{-x} > 0$ donc $e^x + e^{-x} > 0$ donc $\frac{e^x+e^{-x}}{2} > 0$ donc <u>$f(x) > 0$</u>

$$f^2(x) - g^2(x) = \left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\left[e^{2x}+2+e^{-2x}-\left(e^{2x}-2+e^{-2x}\right)\right] = \frac{4}{4} = \underline{1.}$$

④ $g$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme et produit par un scalaire de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$
Soit $x \in \mathbb{R}$ $g'(x) = \frac{e^x - (-1)\times e^{-x}}{2} = \frac{e^x+e^{-x}}{2} = \underline{f(x) > 0}$

⑤ D'après ③ $\forall x \in \mathbb{R}$ $f(x) > 0$ donc $\forall x \in \mathbb{R}$ $g'(x) > 0$ et $g$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

| $x$ | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $g(x)$ | $-\infty$ $\nearrow$ | $0$ | $\nearrow$ $+\infty$ |

$g(0) = \frac{e^0 - e^0}{2} = 0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{2} = +\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{2} = +\infty$ car $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x} = 0$

⑥ branche infinie en $+\infty$ et en $-\infty$ :

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{2x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{2}\frac{e^x}{x} - \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{2}\times\frac{1}{x}\times e^{-x} = +\infty$ par CC et par produit

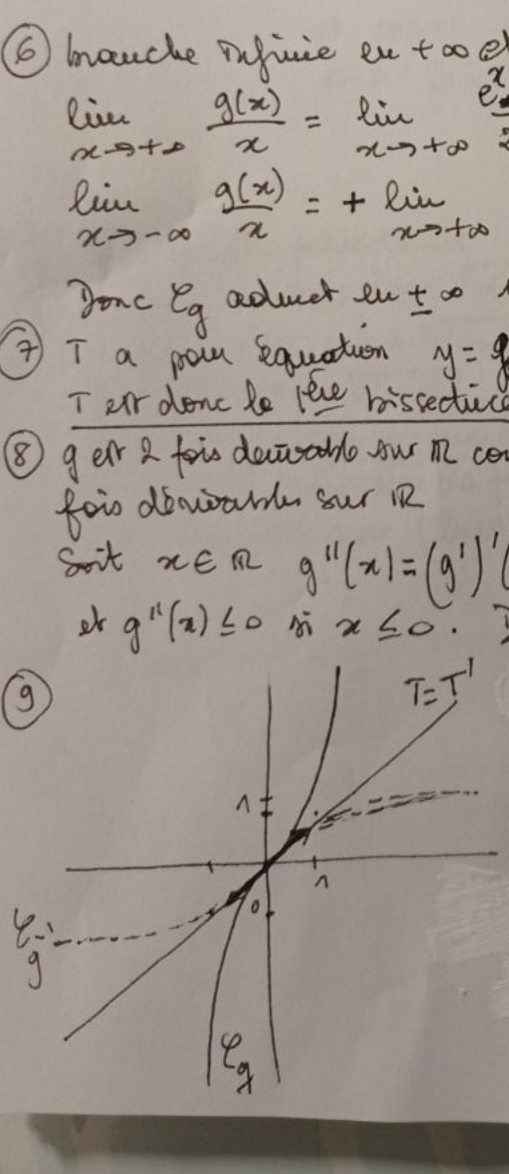
$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{g(x)}{x} = +\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x}$ car $g$ est impaire.

Donc $\mathcal{C}_g$ admet en $\pm\infty$ une <u>branche parabolique de direction asymptotique $(Oy)$</u>

⑦ T a pour équation $y = g'(0)(x-0) + g(0) = f(0)x + 0 = \frac{2}{2}x = x$.
<u>T est donc la 1ère bissectrice</u>.

⑧ $g$ est 2 fois dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme et produit par un scalaire de fonctions deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$
Soit $x \in \mathbb{R}$ $g''(x) = (g')'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = g(x)$. D'après ⑤, $g''(x) \geq 0$ si $x \geq 0$ et $g''(x) \leq 0$ si $x \leq 0$. <u>Donc $g$ est convexe sur $\mathbb{R}^+$ et concave sur $\mathbb{R}^-$</u>

⑨



Partie B

① $g$ est continue sur $\mathbb{R}$ et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
D'après le th de la bijection, elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $f(\mathbb{R}) = ]\lim\limits_{x\to-\infty} f(x), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)[ = \underline{\mathbb{R} = I}$

② $\mathbb{R} = I$ est symétrique par rapport à 0.
Soit $x \in I$ On pose $\underline{y = g^{-1}(-x)}$. Alors $g(y) = -x$ càd $-g(y) = x$
or $g$ impaire donc $-g(y) = g(-y)$. Ainsi $x = g(-y)$ càd $\underline{g^{-1}(x) = -y}$
Donc $g^{-1}(x) = -g^{-1}(-x)$ càd $g^{-1}(-x) = -g^{-1}(x)$ Concl $\underline{g^{-1} \text{ est impaire}}$

③ Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ g du sur $\mathbb{R}$ et $g'(x_0) > 0$ d'après A4 donc $g'(x_0) \neq 0$ donc $g^{-1}$ est dérivable en $g(x_0)$ et $(g^{-1})'(g(x_0)) = \dfrac{1}{g'(x_0)} = \boxed{\dfrac{1}{f(x_0)}}$
Ainsi $g^{-1}$ est dérivable sur $\underline{I}$ entier.
Soit $y_0 \in I$, il existe un unique $x_0 \in \mathbb{R}$ tq $y_0 = g(x_0)$ et
$$(g^{-1})'(y_0) = (g^{-1})'(g(x_0)) = \frac{1}{f(x_0)} = \frac{1}{f(g^{-1}(y_0))}$$
D'après A-3 $f^2(g^{-1}(y_0)) - g^2(g^{-1}(y_0)) = 1$, cad $\left(f(g^{-1}(y_0))\right)^2 - \left(g(g^{-1}(y_0))\right)^2 = 1$
or $g(g^{-1}(y_0)) = y_0$ donc $\left(f(g^{-1}(y_0))\right)^2 = 1 + y_0^2$
et comme $f(g^{-1}(y_0)) > 0$ (voir A3)
on a $f(g^{-1}(y_0)) = \sqrt{1+y_0^2}$ d'où le résultat

④ Voir feuille précédente

⑤ $\forall x \in \mathbb{R}$, $1 + x^2 \geq 1$ donc $\sqrt{1+x^2}$ existe. Mq $x + \sqrt{1+x^2} > 0$ puisque $\mathcal{D}_{\ln} = \mathbb{R}_+^*$
Si $x \geq 0$ alors comme $\sqrt{1+x^2} \geq 1$, $x + \sqrt{1+x^2} \geq 1 > 0$.
Si $x < 0$ alors $\sqrt{1+x^2} > \sqrt{x^2} = |x| = -x$ donc $\sqrt{1+x^2} + x > 0$
$g_1$ est donc $\underline{\text{bien définie sur } \mathbb{R}}$ et $\underline{\text{dérivable sur } \mathbb{R}}$ en tant que somme et composées de fcts dérivables.
On rappelle que $(\ln U)' = \dfrac{U'}{U}$ avec ici $U = x + \sqrt{1+x^2}$
et $U' = 1 + \dfrac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} = 1 + \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$
Soit $x \in \mathbb{R}$
$$g_1'(x) = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{x + \sqrt{1+x^2}} = \frac{\frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{x + \sqrt{1+x^2}} = \frac{\sqrt{1+x^2} + x}{\sqrt{1+x^2}\,(x + \sqrt{1+x^2})} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}}$$

⑥ On a : $\forall x \in \mathbb{R}$, $g_1'(x) = (g^{-1})'(x)$ càd : $\forall x \in \mathbb{R}$ $(g_1 - g^{-1})'(x) = 0$
Donc $g_1 - g^{-1}$ est constante sur $\mathbb{R}$ càd $\exists c \in \mathbb{R}$ $\forall x \in \mathbb{R}$ $(g_1 - g^{-1})(x) = c$
Déterminons $c$ en calculant $(g_1 - g^{-1})(0)$ :
$(g_1 - g^{-1})(0) = g_1(0) - g^{-1}(0) = \ln(0 + \sqrt{1+0^2}) = \ln 1 = 0$ car $g(0) = 0$ d'après A-5.
Ainsi $c = 0$ donc $\forall x \in \mathbb{R}$ $(g_1 - g^{-1})(x) = 0$ donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $g_1(x) = g^{-1}(x)$
Donc $\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \quad g^{-1}(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})}$

Exercice 2

① ⓐ $-1$ est une racine réelle évidente de $(E)$. $(-1)^3-2(-1)^2-i(-1)+3-i=-1-2+i+3-i=0$

ⓑ $z^3-2z^2-iz+3-i=(z+1)(z^2-az+b)$ ssi $z^3-2z^2-iz+3-i=z^3-az^2+bz+z^2-az+b$

ssi $z^2(-2+a-1)+z(-i-b+a)+3-i-b=0$

ssi $\begin{cases} a-3=0 \\ a-b=i \\ b=3-i \end{cases}$ ssi $\begin{cases} a=3 \\ b=3-i \end{cases}$

ⓒ On cherche $(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, (x+iy)^2=4i-3$ ssi $x^2-y^2+2ixy=4i-3$

ssi $\begin{cases} x^2-y^2=-3 \\ 2xy=4 \\ x^2+y^2=\sqrt{4^2+(-3)^2} \end{cases}$ ssi $\begin{cases} x^2-y^2=-3 \\ xy=2 \\ x^2+y^2=\sqrt{25}=5 \end{cases}$ ssi $\begin{cases} x^2=\frac{-3+5}{2}=\frac{2}{2}=1 \\ y^2=\frac{5+3}{2}=\frac{8}{2}=4 \\ xy=2 \end{cases}$

ssi $\begin{cases} x=1 \text{ ou } -1 \\ y=2 \text{ ou } -2 \\ xy \text{ est positif} \end{cases}$ ssi $\begin{cases} x=1 \text{ et } y=2 \\ x=-1 \text{ et } y=-2 \end{cases}$

Les racines carrées de $4i-3$ sont : $1+2i$ et $-1-2i$

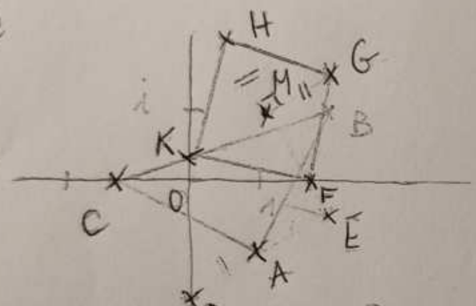
ⓓ $z^2-3z+3-i=0$  $\Delta=9-4(3-i)=9-12+4i=-3+4i=(1+2i)^2$

$z_1=\frac{3+(1+2i)}{2}=\frac{4+2i}{2}=2+i$ et $z_2=\frac{3-(1+2i)}{2}=\frac{2-2i}{2}=1-i$

L'équation $z^2-3z+3-i=0$ admet 2 solutions : $2+i$ et $1-i$.

Les 3 solutions de $(E)$ sont : $-1$, $2+i$ et $1-i$.

② ⓐ




ⓑ D'une part, $(\vec{AB},\vec{AC})=\arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right)=\arg\left(\frac{-1-(1-i)}{2+i-(1-i)}\right)=\arg\left(\frac{-2+i}{1+2i}\right)=\arg\left(\frac{(-2+i)(1-2i)}{(1-2i)(1+2i)}\right)=\arg\left(\frac{\cancel{-2}+4i+i\cancel{+2}}{1+4}\right)$

$=\arg\left(\frac{5i}{5}\right)=\arg(i)=\frac{\pi}{2}\,[2\pi]$ donc ABC est rectangle en A

D'autre part, $AB=|b-a|=|1+2i|=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$ et $AC=|c-a|=|-2+i|=\sqrt{5}$

donc $AB=AC$ et ABC est isocèle en A

Conclusion ABC est rectangle isocèle en A.

ⓒ $a=\frac{1}{2}(e+d)$, d'où $e=2a-d=2(1-i)-(-i\sqrt{3})=2-2i+i\sqrt{3}=2+i(\sqrt{3}-2)$.

ⓓ La rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$ a pour écriture complexe $z'-z_0=e^{i\frac{\pi}{2}}(z-z_0)$ or $z_0=0$ donc l'écriture est : $z'=iz$.

Ainsi, $f=id=i(-i\sqrt{3})=\sqrt{3}$ et $h=ie=i(2+i(\sqrt{3}-2))=2-\sqrt{3}+2i$.

ⓔ La translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe $2i$ a pour écriture complexe $z'=z+2i$, donc $k=d+2i=-i\sqrt{3}+2i=i(2-\sqrt{3})$ et $g=e+2i=2+i\sqrt{3}$

ⓕ Le milieu de $[KG]$ a pour affixe $\frac{1}{2}(k+g)=\frac{1}{2}(i(2-\sqrt{3})+2+i\sqrt{3})$

$=\frac{1}{2}(2+2i)=1+i$

le milieu de [FH] a pour affixe $\frac{1}{2}(f+h) = \frac{1}{2}(\sqrt{3}+2-\sqrt{3}+2i) = \frac{1}{2}(2+2i) = 1+i$
donc [KG] et [FH] ont même milieu M d'affixe $m = 1+i$

g) $\frac{h-m}{g-m} = \frac{2-\sqrt{3}+2i-1-i}{2+i\sqrt{3}-1-i} = \frac{(1-\sqrt{3})+i}{1+i(\sqrt{3}-1)} = \frac{((1-\sqrt{3})+i)(1-i(\sqrt{3}-1))}{(1+i(\sqrt{3}-1))(1-i(\sqrt{3}-1))}$

$= \frac{\cancel{1-\sqrt{3}}+i(1-\sqrt{3})^2+i\cancel{+\sqrt{3}-1}}{1+(\sqrt{3}-1)^2} = \frac{i(1+3-2\sqrt{3})+i}{1+3+1-2\sqrt{3}} = i\,\frac{5-2\sqrt{3}}{5-2\sqrt{3}} = i$

h) on en déduit que $\left|\frac{h-m}{g-m}\right| = |i| = 1$ donc $|h-m| = |g-m|$ et $MH = MG$
et que $(\overrightarrow{MG}, \overrightarrow{MH}) = \arg(i) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ donc MGH est rectangle en M
le quadrilatère FGHK est un parallélogramme (puisque ses diagonales se coupent en leur milieu) d'après g) et d'après h) c'est un carré car les diagonales sont perpendiculaires et ont la même longueur.

Exercice 3 Partie A

① • $f$ n'est pas injective car $|2|=|-2|$ et $2\neq -2$

• $f$ n'est pas surjective car l'équation $|x|=-1$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$ donc $-1$ n'a pas d'antécédent par $f$ dans $\mathbb{R}$. En effet $\forall x\in\mathbb{R}$, $|x|\geq 0$

• $\forall x\in\mathbb{R}$, $f\circ f\circ f(x)=|||x|||=|x|=f(x)$ donc $f$ vérifie $(*)$

② Si $f\circ f=f$ alors $f\circ(f\circ f)=f\circ f$ et $f\circ f=f$ donc $f\circ(f\circ f)=f$ donc $f\circ f\circ f=f$ (associativité de $\circ$) et $f$ vérifie $(*)$

③ • $f$ est injective car $\forall (x,y)\in\mathbb{R}_+^{*2}$, $f(x)=f(y)\Rightarrow \frac{1}{x}=\frac{1}{y}\Rightarrow x=y$

• $f$ est surjective car $\forall y\in\mathbb{R}_+^*$, $y=\frac{1}{\frac{1}{y}}=f\left(\frac{1}{y}\right)$ donc $\exists x=\frac{1}{y}\in\mathbb{R}_+^*$ tq $y=f(x)$

Autre méthode : $\forall x\in\mathbb{R}_+^*$, $x=\frac{1}{\frac{1}{x}}$ donc $x=f\circ f(x)$. Ainsi $f\circ f=id_{\mathbb{R}_+^*}$ ($f$ est involutive) donc $f$ est bijective et $f^{-1}=f$. Donc $f$ est injective et surjective

• $f\circ f\circ f=f\circ(f\circ f)=f\circ id_{\mathbb{R}_+^*}=f$, donc $f$ vérifie $(*)$

④ Si $f\circ f=id_E$ alors $f$ est bijective et $f^{-1}=f$. ($f$ est involutive)

Alors $f\circ f\circ f=f\circ(f\circ f)=f\circ id_E=f$ donc $f$ vérifie $(*)$

⑤ Soit $f:E\to E$ tq $f\circ f\circ f=f$. Raisonnons par double implication

• Mq $f$ injective $\Rightarrow$ $f$ surjective

On suppose que $f$ est injective.
Soit $y\in E$. Montrons qu'il existe $z\in E$ tq $y=f(z)$.
Posons $x=f\circ f(y)$. alors $f(x)=f\circ f\circ f(y)=f(y)$. Or $f$ est injective et $x\in E$, $y\in E$ donc $x=y$. Ainsi $y=f\circ f(y)$ càd $y=f(\underbrace{f(y)}_{z})$. On a trouvé $z$ : c'est $f(y)$)
donc $f$ est surjective

• Mq $f$ surjective $\Rightarrow$ $f$ injective

On suppose que $f$ est surjective
Soient $x\in E$ et $x'\in E$ tq $f(x)=f(x')$. Montrons que $x=x'$
Comme $f$ est surjective, il existe $t\in E$ tq $x=f(t)$
et il existe $t'\in E$ tq $x'=f(t')$

$f(x)=f(x')\Rightarrow f(f(t))=f(f(t'))$. On compose par $f$ :

$f\circ f\circ f(t)=f\circ f\circ f(t')$ donc comme $f\circ f\circ f=f$,

$f(t)=f(t')$ càd $x=x'$.

Concl : $f$ est injective !

## Partie B

① $g$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonctions dérivables

$\forall t\in\mathbb{R}\quad g'(t)=1\times e^{-t}+(-1)te^{-t}=(1-t)e^{-t}$

$\forall t\in\mathbb{R}\quad g'(t)>0$ ssi $1-t>0$ ssi $1>t$

| $t$ | $-\infty$ | | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g'(t)$ | | + | | + | $0$ | $-$ | |
| $g(t)$ | $-\infty$ | ↗ | $0$ | ↗ | $e^{-1}$ | ↘ | $0$ |

$\lim\limits_{t\to+\infty} te^{-t}=\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{t}{e^t}=\frac{1}{\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{e^t}{t}}=0$

car $\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{e^t}{t}=+\infty$ par croissances comparées

et $\lim\limits_{t\to-\infty} te^{-t}=-\infty$ par produit car $\lim\limits_{t\to-\infty}t=-\infty$ et $\lim\limits_{t\to-\infty}e^{-t}=+\infty$.

② $g([0,1])=\underline{[0,e^{-1}]}$ d'après le tableau de variations
$=\{g(x),\ x\in[0,1]\}$.

$g^{-1}([0,1])=\{x\in\mathbb{R}\ /\ g(x)\in[0,1]\}=\{x\in\mathbb{R}\mid g(x)\in[0,e^{-1}]\}=\underline{\mathbb{R}^+}$

③ ⓐ $R$ est <u>réflexive</u> car $\forall x\in\mathbb{R},\ xe^x=xe^x$ donc $xRx$

$R$ est <u>symétrique</u>: Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ si $xRy$ alors $xe^y=ye^x$ donc $ye^x=xe^y$ donc $yRx$

$R$ est <u>transitive</u>: soient $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ tq $xRy$ et $yRz$. Mq $xRz$

$xRy$ donc $xe^y=ye^x$ et $yRz$ donc $ye^z=ze^y$. Mq $xe^z=ze^x$

$xe^z=\underline{xe^y}e^{-y}e^z=\underline{ye^x}e^{-y}e^z=\underline{ye^z}e^{-y}e^x=\underline{ze^y}e^{-y}e^x=ze^x$.

Donc $R$ est une <u>relation d'équivalence</u> sur $\mathbb{R}$.

③ ⓑ Soit $x\in\mathbb{R}$. $Cl(x)=\{y\in\mathbb{R}\ /\ xRy\}=\{y\in\mathbb{R}\mid xe^y=ye^x\}$

$Cl(x)=\{y\in\mathbb{R}\mid xe^{-x}=ye^{-y}\}=\underline{\{y\in\mathbb{R}\ /\ g(x)=g(y)\}}$.

D'après la q1 (tableau de variations de $g$):

$g(]-\infty,0])=]-\infty,0]$ et on sait que $g(x)\in]-\infty,e^{-1}]$.

- <u>si $x\in]-\infty,0]$</u>, $g(x)\in]-\infty,0]$ et $\forall y>0,\ g(y)>0$.
  Comme $g$ est bijective de $]-\infty,0]$ vers $]-\infty,0]$ (elle est continue et strictement croissante sur $]-\infty,0]$ donc on peut appliquer le théorème de la bijection), $g$ est injective sur $]-\infty,0[$
  Ainsi $\forall y\le 0,\ g(x)=g(y)\Rightarrow x=y$ et $\underline{Cl(x)=\{x\}}$ (un seul élt)
- <u>si $x\in\mathbb{R}^+_*-\{1\}$</u> alors $g(x)\in]0,e^{-1}[$. L'équation $g(y)=g(x)$ admet 2 solutions: l'une appartient à $]0,1[$ et l'autre à $]1,+\infty[$ d'après le tableau de variations donc $Cl(x)$ est un ensemble qui a <u>2 éléments</u>
- <u>si $x=1$</u>, l'équation $\underline{g(y)=g(1)=e^{-1}}$ a une solution: $1$ donc $\underline{Cl(x)=\{1\}}$ (un seul élément)