TD7 ex 6

(1) Rappel : $\forall \alpha \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$, $\tan(2\alpha) = \dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$ $(*)$

$\tan(2\arctan x)$ existe ssi $2\arctan x \not\equiv \frac{\pi}{2}\,[\pi]$.

or $2\arctan x \equiv \frac{\pi}{2}\,[\pi]$ ssi $\arctan x \equiv \frac{\pi}{4}\,[\frac{\pi}{2}]$ ssi $\arctan x = \frac{\pi}{4}$ ou $\arctan x = -\frac{\pi}{4}$
puisque arctan est à valeurs dans $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ ssi $x = 1$ ou $x = -1$

Donc $\tan(2\arctan x)$ existe ssi $x \in \mathbb{R}\setminus\{-1,+1\}$

Soit $x \in \mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$, $\tan(\underbrace{2\arctan x}_{\alpha}) \overset{(*)}{=} \dfrac{2\tan(\arctan x)}{1-\tan^2(\arctan x)} = \dfrac{2x}{1-x^2}$

(2) Soit $x \in [-1,1]$ $\sin(\underbrace{2\arcsin x}_{\alpha}) = 2\sin(\arcsin x)\cos(\arcsin x)$
$= 2x\cos(\arcsin x)$
$= 2x\sqrt{1-x^2}$ d'après P

(3) Soit $x \in [-1,1]$ $\cos(\underbrace{2\arccos x}_{\alpha}) = 2\cos^2(\arccos x) - 1 = 2x^2-1$

(4) Soit $x\in[-1,1]$, $\sin^2(\underbrace{\tfrac{1}{2}\arccos x}_{\alpha}) = \dfrac{1-\cos(2\times\frac{1}{2}\arccos x)}{2}$
$= \dfrac{1-\cos(\arccos x)}{2} = \dfrac{1-x}{2}$

Pour (2) on a utilisé que $\forall \alpha\in\mathbb{R}$ $\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha$

Pour (3) on a utilisé que $\forall\alpha\in\mathbb{R}$ $\cos(2\alpha) = 2\cos^2\alpha - 1$

Pour (4) on a utilisé que $\forall\alpha\in\mathbb{R}$, $\sin^2\alpha = \dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}$

TD7 Ex7

① D'une part $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$, d'autre part $\tan\left(\arctan\frac{1}{2}+\arctan\frac{1}{3}\right)$

$$= \frac{\tan(\arctan\frac{1}{2})+\tan(\arctan\frac{1}{3})}{1-\tan(\arctan\frac{1}{2})\times\tan(\arctan\frac{1}{3})}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}} = \frac{\frac{5}{6}}{\frac{5}{6}} = 1$$

- Donc $\arctan\frac{1}{2}+\arctan\frac{1}{3}$ et $\frac{\pi}{4}$ ont même tangente.
- De plus $\frac{\pi}{4}\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ et $\arctan\frac{1}{2}+\arctan\frac{1}{3}\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$

En effet, $0<\frac{1}{2}<\frac{1}{\sqrt{3}}$ et arctan est st^t croissante sur $\mathbb{R}$ donc

$\arctan 0<\arctan\frac{1}{2}<\arctan\frac{1}{\sqrt{3}}$ donc $0<\arctan\frac{1}{2}<\frac{\pi}{6}$

et $0<\frac{1}{3}<\frac{1}{2}$ donc $0<\arctan\frac{1}{3}<\arctan\frac{1}{2}<\frac{\pi}{6}$

donc $\arctan\frac{1}{2}\in\left]0,\frac{\pi}{6}\right[$ et $\arctan\frac{1}{3}\in\left]0,\frac{\pi}{6}\right[$

donc $\arctan\frac{1}{2}+\arctan\frac{1}{3}\in\left]0,\frac{2\pi}{6}\right[=\left]0,\frac{\pi}{3}\right[\subset\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$

- Et comme $\tan|_{\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[}$ est injective, on peut dire que $\arctan\frac{1}{2}+\arctan\frac{1}{3}=\frac{\pi}{4}$

(② bis
- Mq $\arctan\frac{1}{2}+\arctan\frac{1}{5}=\frac{\pi}{4}-\arctan\frac{1}{8}$.

D'une part $\tan\left(\arctan\frac{1}{2}+\arctan\frac{1}{5}\right)=\dfrac{\frac{1}{2}+\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}}=\dfrac{\frac{5+2}{10}}{1-\frac{1}{10}}=\dfrac{\frac{7}{10}}{\frac{9}{10}}=\frac{7}{9}$

D'autre part $\tan\left(\frac{\pi}{4}-\arctan\frac{1}{8}\right)=\dfrac{\tan\frac{\pi}{4}-\tan(\arctan\frac{1}{8})}{1+\tan\frac{\pi}{4}\tan(\arctan\frac{1}{8})}=\dfrac{1-\frac{1}{8}}{1+1\times\frac{1}{8}}=\frac{7}{9}$

donc $\arctan\frac{1}{2}+\arctan\frac{1}{5}$ et $\frac{\pi}{4}-\arctan\frac{1}{8}$ ont même tangente

- De plus $\arctan\frac{1}{2}+\arctan\frac{1}{5}$ et $\frac{\pi}{4}-\arctan\frac{1}{8}$ sont 2 éléments de $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$

En effet, $0<\arctan\frac{1}{2}<\frac{\pi}{6}$ et $0<\frac{1}{5}<\frac{1}{2}<\frac{1}{\sqrt{3}}$ donc $0<\arctan\frac{1}{5}<\arctan\frac{1}{2}<\frac{\pi}{6}$

donc $0<\arctan\frac{1}{2}+\arctan\frac{1}{5}<\frac{2\pi}{6}=\frac{\pi}{3}$ donc $\arctan\frac{1}{2}+\arctan\frac{1}{5}\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$

et $0<\arctan\frac{1}{8}<\frac{\pi}{6}$ donc $-\frac{\pi}{6}<-\arctan\frac{1}{8}<0$ donc $\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}<\frac{\pi}{4}-\arctan\frac{1}{8}<\frac{\pi}{4}$

or $\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}>0$ donc $0<\frac{\pi}{4}-\arctan\frac{1}{8}<\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{2}$.

- Et comme $\tan|_{\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[}$ est injective, on peut dire que

$\arctan\frac{1}{2}+\arctan\frac{1}{5}=\frac{\pi}{4}-\arctan\frac{1}{8}$

donc $\arctan\frac{1}{2}+\arctan\frac{1}{5}+\arctan\frac{1}{8}=\frac{\pi}{4}$)

ex 7

② VRAI

Montrons que $\arcsin\frac{5}{13}+\arcsin\frac{3}{5}$ et $\arcsin\frac{56}{65}$ ont le même sinus et appartiennent tous les deux à $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$

- D'une part $\sin\left(\arcsin\frac{5}{13}+\arcsin\frac{3}{5}\right)$

$$= \sin\left(\arcsin\frac{5}{13}\right)\cos\left(\arcsin\frac{3}{5}\right)+\cos\left(\arcsin\frac{5}{13}\right)\sin\left(\arcsin\frac{3}{5}\right)$$

$$= \frac{5}{13}\times\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}+\sqrt{1-\left(\frac{5}{13}\right)^2}\times\frac{3}{5}$$

$$= \frac{5}{13}\times\sqrt{\frac{16}{25}}+\sqrt{\frac{144}{169}}\times\frac{3}{5} = \frac{5}{13}\times\frac{4}{5}+\frac{12}{13}\times\frac{3}{5}$$

$$= \frac{20+36}{65} = \frac{56}{65}.$$

D'autre part $\sin\left(\arcsin\frac{56}{65}\right)=\frac{56}{65}$

- De plus $\arcsin\frac{56}{65}\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ par définition.

Comme $0<\frac{5}{13}<\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $0<\frac{3}{5}<\frac{\sqrt{2}}{2}$ et comme arcsin est croissante sur $[-1,1]$,

on a $\arcsin 0<\arcsin\frac{5}{13}<\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\arcsin 0<\arcsin\frac{3}{5}<\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}$

ainsi $0<\arcsin\frac{5}{13}<\frac{\pi}{4}$ et $0<\arcsin\frac{3}{5}<\frac{\pi}{4}$

donc $0<\arcsin\frac{5}{13}+\arcsin\frac{3}{5}<\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$

donc $\arcsin\frac{5}{13}+\arcsin\frac{3}{5}\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$

- Concl: $\sin|_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}$ est injectif donc $\arcsin\frac{5}{13}+\arcsin\frac{3}{5}=\arcsin\frac{56}{65}$