Les documents, calculatrices et téléphones portables sont interdits. La clarté et la précision de la rédaction seront prises en compte dans la notation. Les trois exercices sont indépendants et peuvent ne pas être traités dans l'ordre. Il y a matière à valoriser votre travail dans ce devoir, soyez confiants.

Exercice 1

Dans tout l'exercice on note f et g les fonctions définies par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \text{ et } g(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Partie A : étude des fonctions f et g

1. Vérifier que f et g sont bien définies sur $\mathbb{R}$.
2. Etudier la parité de f et de g.
3. Montrer que f est strictement positive sur $\mathbb{R}$ et que $\forall x \in \mathbb{R},\ f^2(x) - g^2(x) = 1$.
4. Donner le domaine de dérivabilité de g et déterminer g'.
5. Dresser le tableau de variation de g. Déterminer les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ de g.
6. Préciser les branches infinies de $\mathcal{C}_g$.
7. Préciser l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_g$ au point d'abscisse 0. On note T cette tangente.
8. Etudier la convexité de g.
9. Tracer $\mathcal{C}_g$ et T.

Partie B : étude de l'application réciproque de g

1. Montrer que g est une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle I à préciser. On note g^{-1} sa réciproque.
2. Démontrer que g^{-1} est impaire.
3. Démontrer que g^{-1} est dérivable sur I et montrer que pour tout $y_0 \in I$, $\left(g^{-1}\right)'(y_0) = \dfrac{1}{\sqrt{1+y_0^2}}$.
4. Construire sur la même figure que précédemment $\mathcal{C}_{g^{-1}}$.
5. Soit $g_1 : x \mapsto \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$. Montrer que g_1 est bien définie sur $\mathbb{R}$, qu'elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.
6. En déduire que $\forall x \in \mathbb{R},\ g^{-1}(x) = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$.

Exercice 2

Partie A : résolution d'une équation du troisième degré

1. On considère l'équation (E) : $z^3 - 2z^2 - iz + 3 - i = 0$.
   (a) Donner une solution réelle évidente de (E).
   (b) Déterminer $a, b \in \mathbb{C}$ tels que $z^3 - 2z^2 - iz + 3 - i = (z+1)(z^2 - az + b)$.
   (c) Déterminer les racines carrées de $4i - 3$. On détaillera les calculs.
   (d) En déduire les trois solutions de (E). On détaillera les calculs.

Partie B : étude de configurations géométriques

1. On considère dans le plan complexe les quatre points A, B, C et D d'affixes $1-i$, $2+i$, -1 et $-i\sqrt{3}$.
   (a) Faire une figure. On rappelle que $\sqrt{3} \approx 1,73$.
   (b) Montrer que le triangle ABC est un triangle rectangle isocèle.
   (c) Soit E le symétrique de D par rapport à A. Placer E. Déterminer son affixe.

(d) La rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$ transforme D en F et E en H. Placer F et H. Déterminer les affixes f et h de F et H.

(e) La translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe $2i$ transforme D en K et E en G. Placer K et G. Déterminer les affixes k et g de K et G.

(f) Montrer que $[KG]$ et $[FH]$ ont le même milieu M. On précisera l'affixe m de M

(g) Montrer que $\frac{h-m}{g-m} = i$.

(h) En déduire la nature du quadrilatère $FGHK$.

Exercice 3

Partie A : étude d'applications

Soit un ensemble E.
On s'intéresse aux applications $f : E \to E$ vérifiant : $f \circ f \circ f = f \quad (*)$.

1. Dans cette question seulement $E = \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto |x|$. Cette fonction est-elle injective ? surjective ? vérifie-t-elle la relation $(*)$? Justifiez vos réponses.
2. Montrer que si $f : E \to E$ est telle que $f \circ f = f$ alors f vérifie $(*)$.
3. Dans cette question seulement $E = \mathbb{R}^*$ et $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*, x \mapsto \frac{1}{x}$. Cette fonction est-elle injective ? surjective ? vérifie-t-elle la relation $(*)$? Justifiez vos réponses.
4. Montrer que si $f : E \to E$ est telle que $f \circ f = id_E$ alors f est bijective et f vérifie $(*)$.
5. Soit $f : E \to E$ une application quelconque qui vérifie $(*)$. Montrer que f est injective si et seulement si f est surjective.

Partie B : étude d'une relation binaire

1. Etudier rapidement les variations de la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :
$$\forall t \in \mathbb{R},\ g(t) = te^{-t}.$$
On dressera le tableau de variations de g et déterminer les limites.
2. Déterminer $g([0,1])$ et $g^{-1}([0,1])$.
3. Soit $\mathcal{R}$ la relation binaire définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x\mathcal{R}y \Leftrightarrow xe^y = ye^x.$$
   (a) Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$.
   (b) Déterminer le nombre d'éléments de la classe d'équivalence d'un réel x.