

# Chapitre 8 : Primitives

Dans toute la suite  $I$  désigne un intervalle de  $\mathbb{R}$  qui contient au moins deux points et  $\mathbb{K}$  désigne  $\mathbb{C}$  ou  $\mathbb{R}$ .

Les fonctions considérées sont à valeurs réelles ou complexes.

On rappelle la notion de fonction de classe  $\mathcal{C}^0$  et de classe  $\mathcal{C}^1$ .

Une fonction de classe  $\mathcal{C}^0$  sur  $I$  est une fonction continue sur  $I$ .

$f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$  et on note  $f \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{K})$  ssi

- $f$  est dérivable sur  $I$ ,
- $f'$  est continue sur  $I$ .

## 1 Calcul de primitives

### 1.1 Primitives

#### Définition 1.

Soient  $f : I \rightarrow \mathbb{K}$  et  $F : I \rightarrow \mathbb{K}$ . On dit que  $F$  est une primitive de  $f$  sur  $I$  lorsque  $F$  est dérivable sur  $I$  et  $F' = f$  sur  $I$ .

► Exemples : Les fonctions  $x \mapsto x$ ,  $x \mapsto x^2$  et  $x \mapsto x^n$  avec  $n \in \mathbb{N}$  admettent sur  $\mathbb{R}$  les primitives respectives :

► Exemple : La fonction  $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$  admet une primitive sur  $]0, +\infty[$  :

#### Propriété 1.

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{K}$  et  $F$  une primitive de  $f$  sur  $I$ .

Soit  $G : I \rightarrow \mathbb{K}$ .

$G$  est une primitive de  $f$  sur  $I$  ssi  $\exists c \in \mathbb{K}$ ,  $G = F + c$  sur  $I$ .

Ainsi, si  $f$  admet une primitive  $F$  alors l'ensemble des primitives<sup>1</sup> de  $f$  est  $\{F + \lambda ; \lambda \in \mathbb{R}\}$ .

On dit que deux primitives d'une même fonction diffèrent d'une constante. Toutes les courbes représentatives des primitives de  $f$  se déduisent de  $\mathcal{C}_F$  par les translations de vecteurs  $k\vec{j}$  ( $k$  réel). Elles réalisent un balayage de la bande de plan définie par  $x \in I$ .

### 1.2 Lien entre primitives et intégrale de $f$

On suppose dans toute la suite que  $a < b$ . On généralise la notion d'intégrale au cas des fonctions à valeurs complexes de la façon suivante : si  $f$  est continue sur  $[a, b]$  à valeurs dans  $\mathbb{C}$ , alors  $\int_a^b f(t)dt = \int_a^b \operatorname{Re}(f(t))dt +$

$i \int_a^b \operatorname{Im}(f(t))dt$ .

Le théorème suivant permet de ramener la recherche de primitives au calcul d'une intégrale.

#### Théorème 1 (Théorème fondamental reliant intégration et dérivation, admis).

Si  $f$  est continue sur  $[a, b]$  alors  $F : x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ , définie sur  $[a, b]$ , a pour dérivée  $f$  et est donc une primitive de  $f$  sur  $[a, b]$ .

Les primitives de  $f$  sur  $[a, b]$  sont les fonctions  $G$  définies par  $G(x) = F(x) + c$ ,  $c \in \mathbb{R}$ .

On note  $\int f(t)dt = F + c$  où  $F = \int_a^{\cdot} f(t)dt$ .

**Conséquence : toute fonction continue admet des primitives.** Mais attention, il n'est pas toujours possible d'exprimer par une fonction usuelle une primitive d'une fonction continue.

**Propriété 2.**

Plus précisément,  $F : x \mapsto \int_a^x f(t) dt$  est l'unique primitive de  $f$  qui s'annule en  $a$ .

► Exemple : la fonction  $\ln$  est la primitive sur  $]0, +\infty[$  de la fonction inverse qui s'annule en 1.

**Propriété 3 (Calcul d'une intégrale au moyen d'une primitive).**

Soit  $f \in C^0(I, \mathbb{R})$  et  $a, b \in I$ .  
Soit  $F$  une primitive de  $f$  sur  $[a, b]$ . Alors

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a) = [F(t)]_a^b.$$

### 1.3 Primitives usuelles

Fonctions puissances :

$$\text{Si } m \neq -1, \int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C \text{ sur } \mathbb{R}^{+*}.$$

$$\text{Si } m = -1, \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C \text{ sur } \mathbb{R}^{+*} \text{ ou } \mathbb{R}^{-*}.$$

$$\int e^x dx = e^x + C \text{ sur } \mathbb{R}.$$

$$a > 0, a \neq 1, \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \text{ sur } \mathbb{R}.$$

Fonctions circulaires :

$$\int \sin x dx = -\cos x + C \text{ sur } \mathbb{R}.$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C \text{ sur } \mathbb{R}.$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C \text{ sur } ]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[, k \in \mathbb{Z}.$$

Fonctions hyperboliques :

$$\int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C \text{ sur } \mathbb{R}.$$

$$\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C \text{ sur } \mathbb{R}.$$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C \text{ sur } \mathbb{R}.$$

Fonctions circulaires réciproques :

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x + C' \text{ sur } ]-1, 1[.$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C \text{ sur } \mathbb{R}.$$

Fonction logarithme :

$$\int \ln x dx = x \ln x - x + C \text{ sur } \mathbb{R}_*^+.$$

Fonction  $x \mapsto e^{\lambda x}$  avec  $\lambda \in \mathbb{C}^*$  :

$$\int e^{\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda} e^{\lambda x} + C \text{ sur } \mathbb{R}.$$

► Exemple : Calculer les primitives de  $x \mapsto e^{ax} \cos(bx)$  et  $x \mapsto e^{ax} \sin(bx)$ .

## 2 Calcul des primitives

### 2.1 Utilisation d'une fonction auxiliaire

1. Si  $f(x)$  est de la forme  $u(x)u'(x)$  :

$$\int f(x)dx = \int u(x)u'(x)dx = \int udu = \frac{1}{2}u^2(x) + C.$$

2. Si  $f(x)$  est de la forme  $\frac{u'(x)}{u(x)}$  :

$$\int f(x)dx = \int \frac{u'(x)}{u(x)}dx = \int \frac{du}{u} = \ln |u(x)| + C.$$

3. Plus généralement, si  $f(x) = \phi'(u(x))u'(x)$  où  $\phi$  est continue et où  $u$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ ,

$$\int f(x)dx = \int \phi(u)du = F(u(x)) + C \text{ où } F \text{ est une primitive de } \phi.$$

► Exemple :  $\int \tan x dx$

### 2.2 Changement de variables

#### Propriété 4 (Changement de variable).

Soit  $\phi$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$ . Soit  $f$  une fonction continue sur  $\phi(I)$ . On a :

$$\forall a, b \in I, \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x)dx = \int_a^b f(\phi(t))\phi'(t)dt.$$

$\phi$  est appelée **changement de variable**. On a  $x = \phi(t), dx = \phi'(t)dt$ .

► Exemple :  $\int_{\alpha}^{\beta} \frac{\phi'(t)}{1 + \phi^2(t)} dt =$

► Exemple : Que vaut  $\int_{-a}^a f(t)dt$  dans le cas où  $f$  est paire? impaire?

► Méthode : Pour effectuer le changement de variables  $x = \phi(t)$  dans l'intégrale  $\int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x) dx$ , il y a trois opérations

à effectuer :

- 1) remplacer  $x$  par  $\phi(t)$
- 2) changer les bornes d'intégration :  $\phi(a), \phi(b) \rightarrow a, b$
- 3) changer l'élément différentiel :  $dx$  devient  $\phi'(t) dt$

► Exemples :  $\int \frac{dx}{x^2 + 2x + 2}$  et  $\int \frac{dx}{x^2 + a^2}$

### 2.3 Intégration par parties

#### Propriété 5.

Soient  $u$  et  $v$  des fonctions de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[a, b]$ .

$$\int_a^b u'(t)v(t) dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t) dt$$

L'intégration par parties s'adapte au calcul de primitives dès lors que l'on exprime l'une des primitives sous la forme d'une intégrale  $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ .

Astuce :  $f(t) = 1 \times f(t)$ .

Une disposition efficace des calculs peut favoriser la mémorisation de la formule.

► Exemple : Calculer  $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \sin t dt$ .

Démonstration : Cela provient de la linéarité de l'intégrale et de la formule  $(uv)' = u'v + uv'$ .

### Applications :

1. Remplacer une fonction "désagréable" par sa dérivée plus simple (recherche de primitives pour  $\ln$  ou  $\arctan$ ).
2. Calculer indirectement une primitive en la faisant réapparaître : par exemple calculer  $\int_1^x \sin(\ln(t)) dt$ .
3. Obtenir une relation de récurrence : par exemple calculer  $\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^n} dx = I_n$ .
4. Calculer  $\int P_n(x)e^{ax} dx$  où  $P$  est un polynôme de degré  $n$  en intégrant  $n$  fois par parties en intégrant à chaque fois le terme exponentielle et en dérivant à chaque fois le terme polynomial jusqu'à obtention d'un polynôme constant : on finit par travailler avec  $\int \alpha e^{\alpha x} dx$ . Même méthode avec  $\int P_n(x) \cos ax dx$  ou  $\int P_n(x) \operatorname{sh} dx$ .  
Par exemple calculer  $\int (x^3 + 3x)e^{-x} dx$  ou  $\int (x^3 + 3x) \sin(2x) dx$ .

## 2.4 Primitives de fonctions du type $x \mapsto \frac{1}{\alpha x^2 + \beta x + \gamma}$

### Propriété 6.

Sur tout intervalle ne contenant pas 0 on a :

$$1. (\forall a \in \mathbb{C}) (\forall n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}), \quad \int (x-a)^n dx = \frac{1}{n+1} (x-a)^{n+1} + \text{constante}$$

$$2. (\forall a \in \mathbb{R}) \int \frac{1}{x-a} dx = \ln|x-a| + \text{constante}$$

**Méthode** : Soit  $f$  la fonction définie par  $f(x) = \frac{1}{\alpha x^2 + \beta x + \gamma}$ , avec  $\alpha \neq 0$ ,  $\alpha, \beta$  et  $\gamma$  réels.

1. Si  $\beta^2 - 4\alpha\gamma > 0$  alors  $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha(x-x_1)(x-x_2)$ . On décompose la fraction rationnelle en éléments simples, c'est-à-dire qu'on la met sous la forme  $f : x \mapsto \frac{\lambda_1}{x-x_1} + \frac{\lambda_2}{x-x_2}$  puis on intègre chacun des éléments simples avec la propriété précédente.

2. Si  $\beta^2 - 4\alpha\gamma = 0$  alors  $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha(x-x_0)^2$ . On met la fraction rationnelle sous la forme  $f : x \mapsto \frac{1}{\alpha(x-x_0)^2}$  puis on intègre avec la propriété précédente.

3. Si  $\beta^2 - 4\alpha\gamma < 0$  (ssi  $4\alpha\gamma > \beta^2$ )

$$\begin{aligned} \alpha x^2 + \beta x + \gamma &= \alpha \left( x^2 + \frac{\beta}{\alpha} x + \frac{\gamma}{\alpha} \right) = \alpha \left( \left( x + \frac{\beta}{2\alpha} \right)^2 + \frac{\gamma}{\alpha} - \frac{\beta^2}{4\alpha^2} \right) \\ &= \alpha \left( \left( x + \frac{\beta}{2\alpha} \right)^2 + \frac{1}{4\alpha^2} (4\alpha\gamma - \beta^2) \right) \text{ or } 4\alpha\gamma > \beta^2 \\ &= \alpha \left( \frac{1}{4\alpha^2} (4\alpha\gamma - \beta^2) \left( \frac{x + \frac{\beta}{2\alpha}}{\sqrt{\frac{1}{4\alpha^2} (4\alpha\gamma - \beta^2)}} \right)^2 + 1 \right). \end{aligned}$$

$$\text{Une primitive de } x \mapsto \frac{1}{\alpha x^2 + \beta x + \gamma} \text{ est : } x \mapsto \frac{2\alpha \arctan(u(x))}{|\alpha| \sqrt{4\alpha\gamma - \beta^2}} \text{ avec } u(x) = \frac{x + \frac{\beta}{2\alpha}}{\sqrt{\frac{1}{4\alpha^2} (4\alpha\gamma - \beta^2)}}.$$

► Exemples :  $\int \frac{dx}{x^2 - x + 1}$ ,  $\int \frac{dx}{x^2 - 6x + 9}$ ,  $\int \frac{1}{x^2 - 5x + 6} dx$ ,  $\int \frac{x^3}{(x^2 - 1)^2} dx$  en faisant un changement de variables  $u = x^2$  et en utilisant que  $\frac{u}{(u-1)^2} = \frac{u-1+1}{(u-1)^2} = \frac{1}{u-1} + \frac{1}{(u-1)^2}$ ,  $\int \frac{x^4}{(1+x^3)} dx$  en faisant le changement de variables  $u = 1 + x$ . On trouve  $\frac{(1+x)^2}{2} - 4(1+x) + 6 \ln|1+x| + \frac{4}{1+x} + \frac{1}{-2(1+x)^2} + C$ .