

Chapitre 8 : Primitives

Dans toute la suite I désigne un intervalle de \mathbb{R} qui contient au moins deux points et \mathbb{K} désigne \mathbb{C} ou \mathbb{R} .

Les fonctions considérées sont à valeurs réelles ou complexes.

On rappelle la notion de fonction de classe \mathcal{C}^0 et de classe \mathcal{C}^1 .

Une fonction de classe \mathcal{C}^0 sur I est une fonction continue sur I .

f est de classe \mathcal{C}^1 sur I et on note $f \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{K})$ ssi

- f est dérivable sur I ,
- f' est continue sur I .

1 Calcul de primitives

1.1 Primitives

Définition 1.

Soient $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ et $F : I \rightarrow \mathbb{K}$. On dit que F est une primitive de f sur I lorsque F est dérivable sur I et $F' = f$ sur I .

► Exemples : Les fonctions $x \mapsto x$, $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto x^n$ avec $n \in \mathbb{N}$ admettent sur \mathbb{R} les primitives respectives :

► Exemple : La fonction $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ admet une primitive sur $]0, +\infty[$:

Propriété 1.

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ et F une primitive de f sur I .

Soit $G : I \rightarrow \mathbb{K}$.

G est une primitive de f sur I ssi $\exists c \in \mathbb{K}$, $G = F + c$ sur I .

Ainsi, si f admet une primitive F alors l'ensemble des primitives¹ de f est $\{F + \lambda ; \lambda \in \mathbb{R}\}$.

On dit que deux primitives d'une même fonction diffèrent d'une constante. Toutes les courbes représentatives des primitives de f se déduisent de \mathcal{C}_F par les translations de vecteurs $k\vec{j}$ (k réel). Elles réalisent un balayage de la bande de plan définie par $x \in I$.

1.2 Lien entre primitives et intégrale de f

On suppose dans toute la suite que $a < b$. On généralise la notion d'intégrale au cas des fonctions à valeurs complexes de la façon suivante : si f est continue sur $[a, b]$ à valeurs dans \mathbb{C} , alors $\int_a^b f(t)dt = \int_a^b \operatorname{Re}(f(t))dt +$

$i \int_a^b \operatorname{Im}(f(t))dt$.

Le théorème suivant permet de ramener la recherche de primitives au calcul d'une intégrale.

Théorème 1 (Théorème fondamental reliant intégration et dérivation, admis).

Si f est continue sur $[a, b]$ alors $F : x \mapsto \int_a^x f(t)dt$, définie sur $[a, b]$, a pour dérivée f et est donc une primitive de f sur $[a, b]$.

Les primitives de f sur $[a, b]$ sont les fonctions G définies par $G(x) = F(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$.

On note $\int_a^x f(t)dt = F + c$ où $F = \int_a^x f(t)dt$.

Conséquence : toute fonction continue admet des primitives. Mais attention, il n'est pas toujours possible d'exprimer par une fonction usuelle une primitive d'une fonction continue.

Propriété 2.

Plus précisément, $F : x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ est l'unique primitive de f qui s'annule en a .

► Exemple : la fonction \ln est la primitive sur $]0, +\infty[$ de la fonction inverse qui s'annule en 1.

Propriété 3 (Calcul d'une intégrale au moyen d'une primitive).

Soit $f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$ et $a, b \in I$.

Soit F une primitive de f sur $[a, b]$. Alors

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a) = [F(t)]_a^b.$$

1.3 Primitives usuelles

Fonctions puissances :

$$\text{Si } m \neq -1, \int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C \text{ sur } \mathbb{R}^{+*}.$$

$$\text{Si } m = -1, \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C \text{ sur } \mathbb{R}^{+*} \text{ ou } \mathbb{R}^{-*}.$$

$$\int e^x dx = e^x + C \text{ sur } \mathbb{R}.$$

$$a > 0, a \neq 1, \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \text{ sur } \mathbb{R}.$$

Fonctions circulaires :

$$\int \sin x dx = -\cos x + C \text{ sur } \mathbb{R}.$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C \text{ sur } \mathbb{R}.$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C \text{ sur }]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[, k \in \mathbb{Z}.$$

Fonctions hyperboliques :

$$\int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C \text{ sur } \mathbb{R}.$$

$$\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C \text{ sur } \mathbb{R}.$$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C \text{ sur } \mathbb{R}.$$

Fonctions circulaires réciproques :

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x + C' \text{ sur }]-1, 1[.$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C \text{ sur } \mathbb{R}.$$

Fonction logarithme :

$$\int \ln x dx = x \ln x - x + C \text{ sur } \mathbb{R}_*^+.$$

Fonction $x \mapsto e^{\lambda x}$ avec $\lambda \in \mathbb{C}^*$:

$$\int e^{\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda} e^{\lambda x} + C \text{ sur } \mathbb{R}.$$

► Exemple : Calculer les primitives de $x \mapsto e^{ax} \cos(bx)$ et $x \mapsto e^{ax} \sin(bx)$.

2 Calcul des primitives

2.1 Utilisation d'une fonction auxiliaire

1. Si $f(x)$ est de la forme $u(x)u'(x)$:

$$\int f(x)dx = \int u(x)u'(x)dx = \int udu = \frac{1}{2}u^2(x) + C.$$

2. Si $f(x)$ est de la forme $\frac{u'(x)}{u(x)}$:

$$\int f(x)dx = \int \frac{u'(x)}{u(x)}dx = \int \frac{du}{u} = \ln |u(x)| + C.$$

3. Plus généralement, si $f(x) = \phi'(u(x))u'(x)$ où ϕ est continue et où u est de classe \mathcal{C}^1 ,

$$\int f(x)dx = \int \phi(u)du = F(u(x)) + C \text{ où } F \text{ est une primitive de } \phi.$$

► Exemple : $\int \tan x dx$

2.2 Changement de variables

Propriété 4 (Changement de variable).

Soit ϕ une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur I . Soit f une fonction continue sur $\phi(I)$. On a :

$$\forall a, b \in I, \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x)dx = \int_a^b f(\phi(t))\phi'(t)dt.$$

ϕ est appelée **changement de variable**. On a $x = \phi(t), dx = \phi'(t)dt$.

► Exemple : $\int_{\alpha}^{\beta} \frac{\phi'(t)}{1 + \phi^2(t)} dt =$

► Exemple : Que vaut $\int_{-a}^a f(t)dt$ dans le cas où f est paire? impaire?

► Méthode : Pour effectuer le changement de variables $x = \phi(t)$ dans l'intégrale $\int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x) dx$, il y a trois opérations

à effectuer :

- 1) remplacer x par $\phi(t)$
- 2) changer les bornes d'intégration : $\phi(a), \phi(b) \rightarrow a, b$
- 3) changer l'élément différentiel : dx devient $\phi'(t) dt$

► Exemples : $\int \frac{dx}{x^2 + 2x + 2}$ et $\int \frac{dx}{x^2 + a^2}$

2.3 Intégration par parties

Propriété 5.

Soient u et v des fonctions de classe \mathcal{C}^1 sur $[a, b]$.

$$\int_a^b u'(t)v(t) dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t) dt$$

L'intégration par parties s'adapte au calcul de primitives dès lors que l'on exprime l'une des primitives sous la forme d'une intégrale $F(x) = \int_a^x f(t)dt$.

Astuce : $f(t) = 1 \times f(t)$.

Une disposition efficace des calculs peut favoriser la mémorisation de la formule.

► Exemple : Calculer $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \sin t dt$.

Démonstration : Cela provient de la linéarité de l'intégrale et de la formule $(uv)' = u'v + uv'$.

Applications :

1. Remplacer une fonction "désagréable" par sa dérivée plus simple (recherche de primitives pour \ln ou \arctan).
2. Calculer indirectement une primitive en la faisant réapparaître : par exemple calculer $\int_1^x \sin(\ln(t)) dt$.
3. Obtenir une relation de récurrence : par exemple calculer $\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^n} dx = I_n$.
4. Calculer $\int P_n(x)e^{ax} dx$ où P est un polynôme de degré n en intégrant n fois par parties en intégrant à chaque fois le terme exponentielle et en dérivant à chaque fois le terme polynomial jusqu'à obtention d'un polynôme constant : on finit par travailler avec $\int \alpha e^{\alpha x} dx$. Même méthode avec $\int P_n(x) \cos ax dx$ ou $\int P_n(x) \operatorname{sh} dx$.
Par exemple calculer $\int (x^3 + 3x)e^{-x} dx$ ou $\int (x^3 + 3x) \sin(2x) dx$.

2.4 Primitives de fonctions du type $x \mapsto \frac{1}{\alpha x^2 + \beta x + \gamma}$

Propriété 6.

Sur tout intervalle ne contenant pas 0 on a :

$$1. (\forall a \in \mathbb{C}) (\forall n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}), \quad \int (x-a)^n dx = \frac{1}{n+1} (x-a)^{n+1} + \text{constante}$$

$$2. (\forall a \in \mathbb{R}) \int \frac{1}{x-a} dx = \ln|x-a| + \text{constante}$$

Méthode : Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{1}{\alpha x^2 + \beta x + \gamma}$, avec $\alpha \neq 0$, α, β et γ réels.

1. Si $\beta^2 - 4\alpha\gamma > 0$ alors $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha(x-x_1)(x-x_2)$. On décompose la fraction rationnelle en éléments simples, c'est-à-dire qu'on la met sous la forme $f : x \mapsto \frac{\lambda_1}{x-x_1} + \frac{\lambda_2}{x-x_2}$ puis on intègre chacun des éléments simples avec la propriété précédente.

2. Si $\beta^2 - 4\alpha\gamma = 0$ alors $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha(x-x_0)^2$. On met la fraction rationnelle sous la forme $f : x \mapsto \frac{1}{\alpha(x-x_0)^2}$ puis on intègre avec la propriété précédente.

3. Si $\beta^2 - 4\alpha\gamma < 0$ (ssi $4\alpha\gamma > \beta^2$)

$$\begin{aligned} \alpha x^2 + \beta x + \gamma &= \alpha \left(x^2 + \frac{\beta}{\alpha} x + \frac{\gamma}{\alpha} \right) = \alpha \left(\left(x + \frac{\beta}{2\alpha} \right)^2 + \frac{\gamma}{\alpha} - \frac{\beta^2}{4\alpha^2} \right) \\ &= \alpha \left(\left(x + \frac{\beta}{2\alpha} \right)^2 + \frac{1}{4\alpha^2} (4\alpha\gamma - \beta^2) \right) \text{ or } 4\alpha\gamma > \beta^2 \\ &= \alpha \left(\frac{1}{4\alpha^2} (4\alpha\gamma - \beta^2) \left(\frac{x + \frac{\beta}{2\alpha}}{\sqrt{\frac{1}{4\alpha^2} (4\alpha\gamma - \beta^2)}} \right)^2 + 1 \right). \end{aligned}$$

$$\text{Une primitive de } x \mapsto \frac{1}{\alpha x^2 + \beta x + \gamma} \text{ est : } x \mapsto \frac{2\alpha \arctan(u(x))}{|\alpha| \sqrt{4\alpha\gamma - \beta^2}} \text{ avec } u(x) = \frac{x + \frac{\beta}{2\alpha}}{\sqrt{\frac{1}{4\alpha^2} (4\alpha\gamma - \beta^2)}}.$$

► Exemples : $\int \frac{dx}{x^2 - x + 1}$, $\int \frac{dx}{x^2 - 6x + 9}$, $\int \frac{1}{x^2 - 5x + 6} dx$, $\int \frac{x^3}{(x^2 - 1)^2} dx$ en faisant un changement de variables $u = x^2$ et en utilisant que $\frac{u}{(u-1)^2} = \frac{u-1+1}{(u-1)^2} = \frac{1}{u-1} + \frac{1}{(u-1)^2}$, $\int \frac{x^4}{(1+x^3)} dx$ en faisant le changement de variables $u = 1+x$. On trouve $\frac{(1+x)^2}{2} - 4(1+x) + 6 \ln|1+x| + \frac{4}{1+x} + \frac{1}{-2(1+x)^2} + C$.