Ex 1 :

Soit la fonction F définie par : $\forall x > 0,\ F(x) = \int_1^x f_0(t)\,\mathrm{d}t = \int_1^x \frac{\ln t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$. La courbe représentative de F sera notée Γ.

1) **a)** Déterminer le signe de F sur $\mathbb{R}_+^*$.
   b) Justifier la continuité et la dérivabilité de F sur $\mathbb{R}_+^*$.
   c) Calculer $F'(x)$ pour $x > 0$.

2) Montrer que : $\forall x > 0,\ F(x) = F\left(\frac{1}{x}\right)$.

3) **a)** Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $\forall x > 0,\ \varphi(x) = \frac{\operatorname{Arctan} x}{x}$. Montrer que φ est prolongeable par continuité en 0.
   b) Montrer que : $\forall x > 0,\ F(x) = \operatorname{Arctan} x \ln x - \int_1^x \varphi(t)\,dt$.
   c) En déduire que F est prolongeable par continuité en 0. La nouvelle fonction ainsi obtenue sera encore notée F.
   Que peut-on dire de F au voisinage de $+\infty$?

4) Dans cette question, on cherche à calculer une valeur approchée de $F(0)$.
   a) Pour $k \in \mathbb{N}$ et $x > 0$, calculer $I_k(x) = \int_1^x t^k \ln t\,dt$.
   b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x > 0,\ \frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{2k} + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n+2}}{1+x^2}$.
   c) En déduire , pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in]0,1[$, une majoration de $\left| F(x) - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k I_{2k}(x) \right|$.
   d) On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}$.
   Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ |F(0) - u_n| \leqslant \frac{1}{(2n+3)^2}$.
   e) Donner, en *détaillant la méthode utilisée*, une valeur approchée à 10^{-2} près de $F(0)$.

5) Tracer l'allure de la courbe Γ.

Ex 2 : Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par : $g(t) = \frac{\operatorname{sh} t}{t}$ pour $t \neq 0$ et $g(0) = 1$
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \int_x^{2x} \varphi(t)\,dt$

1) Montrer que f est bien définie et étudier la parité de f.
2) Justifier que f est dérivable et calculer $f'(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.
3) Dresser le tableau de variation de f et préciser les limites.