ex 10 TD7

arctan est définie sur $\mathbb{R}$ donc le domaine de validité de l'équation est $\mathbb{R}$. Soit S l'ensemble des solutions de l'équation.
Soit $x \in \mathbb{R}^-$. Alors $x \leq 0$ et donc $2x \leq 0$ et comme arctan est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ on en déduit que $\arctan x \leq \arctan 0$ et $\arctan(2x) \leq \arctan 0$. Or $\arctan 0 = 0$.
On conclut que $\arctan x + \arctan(2x) \leq 0$ donc $\arctan x + \arctan(2x) \neq \frac{\pi}{4}$
Ainsi $S \subset \mathbb{R}^+$.
Soit $x \geq \frac{1}{2}$. Alors $2x \geq 1$ et $\arctan x \geq \arctan \frac{1}{2} > 0$ et $\arctan(2x) \geq \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$
Donc $\arctan x + \arctan(2x) > \frac{\pi}{4}$
Ainsi $S \subset [0, \frac{1}{2}[$ et pour tout $x \in [0, \frac{1}{2}[$, $\arctan x + \arctan 2x \in [0, \frac{\pi}{2}[$
car $\arctan x + \arctan 2x < \arctan \frac{1}{2} + \arctan 1 < \arctan 1 + \arctan 1 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$
Soit $x \in [0, \frac{1}{2}[$, $\arctan 2x + \arctan x = \frac{\pi}{4}$

ssi $\tan(\arctan 2x + \arctan x) = \tan \frac{\pi}{4}$ } tan est bijective $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

ssi $\dfrac{\tan(\arctan 2x) + \tan(\arctan x)}{1 - \tan(\arctan 2x)\tan(\arctan x)} = 1$

ssi $\dfrac{2x + x}{1 - 2x \times x} = 1$

ssi $3x = 1 - 2x^2$ ssi $2x^2 + 3x - 1 = 0$

ssi $x = \dfrac{-3 \pm \sqrt{17}}{4}$ ssi $x = \dfrac{-3 + \sqrt{17}}{4}$

puisque $x \in [0, \frac{1}{2}[$

Concl : $S = \left\{ \dfrac{-3 + \sqrt{17}}{4} \right\}$

Rq : on aurait pu aussi raisonner par analyse - synthèse.

TD7 ex 13

Soit $g : x \mapsto \arctan\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$

g est définie sur $]-1,1]$. En effet, $\frac{1-x}{1+x} \geq 0$ ssi $\begin{cases} 1-x \geq 0 \text{ et } 1+x > 0 \\ \text{ou} \\ 1-x \leq 0 \text{ et } 1+x < 0 \end{cases}$

ssi $\begin{cases} 1 \geq x \text{ et } x < -1 \\ \text{ou} \\ x \geq 1 \text{ et } x < -1 \text{ (impossible)} \end{cases}$ ssi $x \in]-1,1]$

g est dérivable sur $]-1,1[$ entant que composée de $\overset{u=}{\arctan}$, dérivable sur $\mathbb{R}$

et de $\overset{v:}{x} \longmapsto \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$, dérivable sur $]-1,1[$ en tant que composée de $x \mapsto \sqrt{x}$, dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et de $x \mapsto \frac{1-x}{1+x}$, dérivable sur $]-1,1[$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$.

Soit $x \in]-1,1[$; $g'(x) = (u' \circ v)(x) \times v'(x)$

$$= \frac{1}{1+\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)^2} \times \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}} \times \frac{-(1+x)-(1-x)}{(1+x)^2}$$

$$= \frac{-1}{1+\frac{1-x}{1+x}} \cdot \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}} \cdot \frac{1}{(1+x)^2}$$

$$= \frac{-1}{(1+x)^2+(1-x)(1+x)} \cdot \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}} = \frac{-1 \quad \sqrt{1+x}}{(2x+2)\sqrt{1-x}}$$

$$= \frac{-1}{2}\frac{1}{\sqrt{1+x}\sqrt{1-x}} = -\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2}\arccos' x.$$

Ainsi, $\forall x \in]-1,1[$, $g(x) = \frac{1}{2}\arccos x + \text{cstte}$.

Or $g(0) = \frac{1}{2}\arccos 0 + \text{cstte} = \frac{\pi}{4} + \text{cstte} = \frac{\pi}{4}$ donc cstte $= 0$.

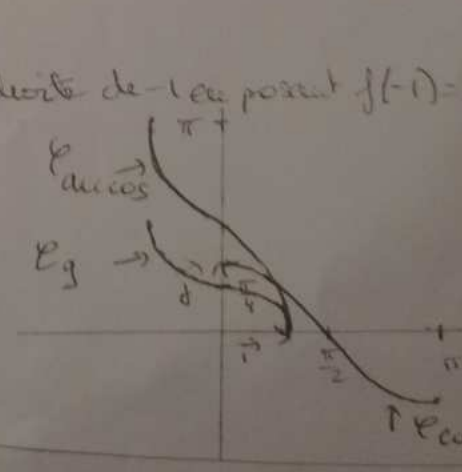
donc $\forall x \in]-1,1[$, $g(x) = \frac{1}{2}\arccos x$. De plus $g(1) = 0$ et $\frac{1}{2}\arccos 1 = 0$

Donc $\boxed{\forall x \in]-1,1],\ g = \frac{1}{2}\arccos.}$

On peut prolonger f par continuité à droite de -1 en posant $f(-1) = \frac{\pi}{2}$

car $\lim_{x \to -1} \arctan\sqrt{\frac{1-x}{1-x}} = \frac{\pi}{2}$

On obtient la courbe $\mathcal{C}_g$ en appliquant l'homothétie de centre 0 et de rapport $\frac{1}{2}$ à $\mathcal{C}_{\arccos}$.



Ex 16

Soit $x \in \mathbb{R}$

Soit $n \in \mathbb{Z}$

$$\left.\begin{array}{l}(\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x)^n = (e^x)^n = e^{nx} \\ \operatorname{ch}(nx) + \operatorname{sh}(nx) = e^{nx}\end{array}\right\} \text{ donc } (\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x)^n = \operatorname{ch}(nx) + \operatorname{sh}(nx)$$

Ex 17 Domaine de validité : $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$

Posons $z = \operatorname{ch} y$.

$$S = \begin{cases} x = \operatorname{ch}(2y) \\ 3 \ln x = 2 \ln(\operatorname{ch} y) \end{cases} \text{ ssi } \begin{cases} x = 2z^2 + 1 \\ \frac{3}{2} \ln x = \ln z \end{cases} \text{ ssi } \begin{cases} x - 2z^2 - 1 = 0 \\ x^{3/2} = z \end{cases}$$

$$\text{ssi } \begin{cases} x - 2(x^{3/2})^2 - 1 = 0 \\ z = x^{3/2} \end{cases} \text{ ssi } \begin{cases} -2x^3 + x - 1 = 0 \\ z = x^{3/2} \end{cases} \text{ ssi } \begin{cases} (x+1)(-2x^2 + 2x - 1) = 0 \\ z = x^{3/2} \end{cases}$$

En effet,

-1 est racine évidente de $-2x^3 + x - 1$ car $-2(-1)^3 + (-1) + (-1) = 0$

$$\begin{array}{r|l} -2x^3 + x - 1 & x+1 \\ \hline -2x^3 - 2x^2 & -2x^2 + 2x - 1 \\ \hline 2x^2 + x & \\ 2x^2 + 2x & \\ \hline -x - 1 & \end{array}$$

De plus, $-2x^2 + 2x - 1 = 0$ n'admet pas de sol réelle car $\Delta = 4 - 4(-2)(-1) < 0$

Donc S ssi $\begin{cases} x = -1 \\ z = x^{3/2} \end{cases}$ or $x \in \mathbb{R}_+^*$ donc S n'admet pas de sol !