Ex 1

① ⓐ Soit $f_0 : t \mapsto \frac{\ln t}{1+t^2}$. f_0 est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ - Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$

- si $x \in]0,1[$, alors comme f_0 est continue sur $[x,1] \subset \mathbb{R}_+^*$, $F(x) = \int_1^x f_0(t)\,dt$ existe. De plus, pour tout $t \in [x,1]$, $0 < x \leq t \leq 1$, donc $\ln t < 0$

or $1+t^2 > 0$ donc $f_0(t) = \frac{\ln t}{1+t^2} < 0$

donc $\int_x^1 f_0(t) < 0$

donc $-\int_x^1 f_0(t) > 0$

ainsi $F(x) = \int_1^x f_0(t)\,dt = -\int_x^1 f_0(t)\,dt > 0$.

- si $x = 1$, $F(1) = \int_1^1 f_0(t)\,dt = 0$

- si $x > 1$ alors comme f_0 est continue sur $[1,x] \subset \mathbb{R}_+^*$, $F(x)$ existe.
De plus, pour tout $t \in [1,x]$, $1 \leq t \leq x$ donc $\ln t > \ln 1 = 0$ et $1+t^2 > 0$
donc $f_0(t) = \frac{\ln t}{1+t^2} > 0$ donc $\int_1^x f_0(t)\,dt > 0$ donc $F(x) > 0$.

Conclusion : si $x \in]0,1[$, $F(x) > 0$, si $x = 1$, $F(x) = 0$, si $x > 1$, $F(x) > 0$.
càd si $x \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$, $F(x) > 0$ et $F(1) = 0$.

① ⓑ D'après le cours, $F : x \mapsto \int_1^x \frac{\ln t}{1+t^2}\,dt$ est la primitive de f_0 sur $\mathbb{R}_+^*$ qui s'annule en 1 puisque f_0 est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
Donc par définition d'une primitive, F est dérivable donc continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et $F' = f_0$ sur $\mathbb{R}_+^*$

① ⓒ $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $F'(x) = f_0(x) = \boxed{\frac{\ln x}{1+x^2} = F'(x)}$

② Soit $x > 0$. $F(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{1+t^2}\,dt$. Faisons le changement de variable $u = \frac{1}{t}$.
$\phi : t \mapsto \frac{1}{t}$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
et $du = -\frac{1}{t^2}\,dt$. Lorsque t varie entre 1 et x, u varie entre $\frac{1}{1}$ et $\frac{1}{x}$.
Ainsi $F(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{t^2\left(\frac{1}{t^2}+1\right)}\,dt = \int_1^x \frac{\ln t}{\left(\frac{1}{t}\right)^2+1} \times \left(\frac{dt}{t^2}\right) = \int_{\frac{1}{1}}^{\frac{1}{x}} \frac{\ln\left(\frac{1}{u}\right)}{u^2+1}(-du)$
en effet $u = \frac{1}{t} \Leftrightarrow t = \frac{1}{u}$.

Donc $F(x) = -\int_1^{\frac{1}{x}} \frac{-\ln u}{u^2+1}\,du = \int_1^{\frac{1}{x}} \frac{\ln u}{1+u^2}\,du = F\left(\frac{1}{x}\right)$

Donc $\boxed{\forall x > 0 \quad F(x) = F\left(\frac{1}{x}\right)}$

③ ⓐ Montrons que φ admet une limite finie en 0.
$\lim_{x \to 0} \varphi(x) = \lim_{x \to 0} \frac{\arctan x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\arctan x - \arctan 0}{x - 0} = \arctan'(0)$
car arctan est dérivable en 0. Or $\arctan' : x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$
donc $\arctan'(0) = \frac{1}{1+0^2} = 1$.
Ainsi $\lim_{x \to 0} \varphi(x) = 1$ et φ est prolongeable par continuité en 0 en posant $\varphi(0) = 1$

③ ⓑ Soit $x>0$.

Soit $t\in\mathbb{R}_+^*$. On pose $u(t)=\ln t$ $\quad u'(t)=\frac{1}{t}$ $\quad$ - u et v sont $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$

$v(t)=\arctan t \quad v'(t)=\frac{1}{1+t^2}$

on procède à une intégration par parties :

$$F(x)=\int_1^x \frac{\ln t}{1+t^2}dt=\int_1^x u(t)\times v'(t)dt=[\ln t\times\arctan t]_1^x-\int_1^x \frac{1}{t}\times\arctan t\,dt$$

$$F(x)=\ln x\times\arctan x-\ln 1\times\arctan 1-\int_1^x \varphi(t)dt$$

$$F(x)=\arctan x\ln x-\int_1^x\varphi(t)dt \text{ car } \ln(1)=0$$

③ ⓒ Montrons que F admet une limite finie en 0.

- D'une part $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arctan x}{x}=1$. D'autre part $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x=0$ par CC.

Par produit, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arctan x}{x}\times x\ln x=1\times 0=0$

Donc $\lim\limits_{x\to 0}\arctan x\ln x=0$.

- φ est prolongeable par continuité en 0 donc si on note encore φ la fonction prolongée, φ est continue sur $[0,1]$ donc $\int_0^1\varphi(t)dt$ existe donc $\lim\limits_{x\to 0}\int_1^x\varphi(t)dt=-\lim\limits_{x\to 0}\int_x^1\varphi(t)dt=-\int_0^1\varphi(t)dt$

- Ainsi $\lim\limits_{x\to 0}F(x)=0-\int_0^1\varphi(t)dt=-\int_0^1\varphi(t)dt$ par somme des limites. Donc F est prolongeable par continuité en 0 en posant $F(0)=-\int_0^1\varphi(t)dt$

De plus $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}F\left(\frac{1}{x}\right)=\lim\limits_{y\to 0}F(y)=F(0)$.

On peut affirmer que $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=F(0)}$ donc $\mathcal{C}_F$ admet la droite d'équation $y=F(0)$ comme asymptote en $+\infty$.

④ Soit $k\in\mathbb{N}$ et $x>0$

ⓐ $I_k(x)=\int_1^x t^k\ln t\,dt$:

Soit $t\in\mathbb{R}_+^*$, on pose $u(t)=\ln t \quad u'(t)=\frac{1}{t}$ $\quad$ u et v sont $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$

$v(t)=\frac{t^{k+1}}{k+1} \quad v'(t)=t^k$

On procède à une IPP

$$I_k(x)=\int_1^x t^k\ln t\,dt=\left[\ln t\,\frac{t^{k+1}}{k+1}\right]_1^x-\int_1^x\frac{t^{k+1}}{k+1}\times\frac{1}{t}dt$$

$$I_k(x)=\ln x\,\frac{x^{k+1}}{k+1}-\ln 1\,\frac{1^{k+1}}{k+1}-\frac{1}{k+1}\int_1^x t^k dt \text{ par linéarité de l'intégrale}$$

$$I_k(x)=\ln x\,\frac{x^{k+1}}{k+1}-\frac{1}{k+1}\left[\frac{t^{k+1}}{k+1}\right]_1^x$$

$$I_k(x)=\ln x\,\frac{x^{k+1}}{k+1}-\frac{1}{k+1}\left(\frac{x^{k+1}}{k+1}-\frac{1^{k+1}}{k+1}\right)$$

$$I_k(x)=\frac{1}{k+1}\cdot\left[\left(\ln x-\frac{1}{k+1}\right)x^{k+1}+\frac{1}{k+1}\right]=\boxed{\frac{((k+1)\ln x-1)x^{k+1}+1}{(k+1)^2}=I_k(x)}$$

(4)(b) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x > 0$.

somme des $(n+1)$ 1ers termes d'une suite géométrique de raison $-x^2 \neq 1$

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{2k} = \sum_{k=0}^{n} (-x^2)^k = \frac{1-(-x^2)^{n+1}}{1-(-x^2)} = \frac{1-(-1)^{n+1}(x^2)^{n+1}}{1+x^2}$$

Donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{2k} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{(-1)^{n+1}(x^2)^{n+1}}{1+x^2}$

Ainsi $\displaystyle\frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{2k} + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+2}}{1+x^2}$.

(4)(c) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in]0,1[$.

$$F(x) - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k I_{2k}(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{1+t^2}\,dt - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \left(\int_1^x t^{2k} \ln t\,dt\right)$$

$= \displaystyle\int_1^x \frac{\ln t}{1+t^2}\,dt - \int_1^x \left(\sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^{2k} \ln t\right) dt$ par linéarité de l'intégrale

$= \displaystyle\int_1^x \left(\frac{\ln t}{1+t^2} - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^{2k} \ln t\right) dt$ par linéarité de l'intégrale

$= \displaystyle -\int_x^1 \left(\ln t \times \left(\frac{1}{1+t^2} - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^{2k}\right)\right) dt$

$= \displaystyle -\int_x^1 \left(\ln t \times (-1)^{n+1} \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\right) dt$ q 4b $\displaystyle\frac{1}{1+t^2} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^{2k} + (-1)^{n+1} \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}$

$= \displaystyle -(-1)^{n+1} \int_x^1 \ln t \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,dt$

$= \displaystyle (-1)^{n+1} \int_x^1 -\ln t \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,dt$.

Ainsi $\displaystyle\left|F(x) - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k I_{2k}(x)\right| = \int_x^1 -\ln t \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,dt$

car $\displaystyle\int_x^1 -\ln t \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,dt$ est un nombre positif, dans la mesure où si $x \leq t \leq 1$, alors $\ln t \leq \ln 1 = 0$ donc $-\ln t \geq 0$ et $\displaystyle\frac{t^{2n+2}}{1+t^2} > 0$ donc $\displaystyle -\ln t \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} \geq 0$.

De plus, pour tout $t \in [x,1]$, $\displaystyle 0 < \frac{1}{1+t^2} \leq 1$ puisque $1+t^2 \geq 1$

Donc $\displaystyle -\ln t\, t^{2n+2} \times \frac{1}{1+t^2} \leq -\ln t\, t^{2n+2} \times 1$ car $-\ln t \times t^{2n+2} \geq 0$

Donc par croissance de l'intégrale, comme $x \leq 1$:

$$\int_x^1 -\ln t\, t^{2n+2} \times \frac{1}{1+t^2}\,dt \leq \int_x^1 -\ln t\, t^{2n+2}\,dt = \int_1^x \ln t\, t^{2n+2}\,dt$$

Donc $\boxed{\left|F(x) - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k I_{2k}(x)\right| \leq I_{2n+2}(x).}$

4 d) Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après q 4 c), si $x \in]0,1[$

$$-I_{2n+2}(x) \le F(x) - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k I_{2k}(x) \le I_{2n+2}(x)$$

Donc $$\lim_{x\to 0} -I_{2n+2}(x) \le \lim_{x\to 0} F(x) - \lim_{x\to 0} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k I_{2k}(x) \le \lim_{x\to 0} I_{2n+2}(x) \quad (*)$$

or $$\lim_{x\to 0} I_{2k}(x) \underset{q\,4a}{=} \lim_{x\to 0} \frac{(2k+1)\ln x\, x^{2k+1} - x^{2k+1} + 1}{(2k+1)^2} = \frac{1}{(2k+1)^2}$$

par croissances comparées, $\lim_{x\to 0} \ln x \times x^{2k+1} = 0$

et $\lim_{x\to 0} x^{2k+1} = 0$ (fonction puissance avec $\alpha = 2k+1 > 0$)

et de même, $$\lim_{x\to 0} I_{2n+2}(x) = \lim_{x\to 0} \frac{(2n+2+1)\ln x\, x^{2n+2+1} - x^{2n+2+1} + 1}{(2n+2+1)^2}$$
$$= \frac{1}{(2n+3)^2}$$

Donc (*) devient : $$-\frac{1}{(2n+3)^2} \le F(0) - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \times \frac{1}{(2k+1)^2} \le \frac{1}{(2n+3)^2}$$

càd $$\left| F(0) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} \right| \le \frac{1}{(2n+3)^2}$$

ou encore $$\boxed{|F(0) - u_n| \le \frac{1}{(2n+3)^2}}$$

4 e) on se propose de résoudre l'inéquation $\frac{1}{(2n+3)^2} \le 10^{-2}$ pour $n \in \mathbb{N}$

$\frac{1}{(2n+3)^2} \le \frac{1}{100}$ ssi $(2n+3)^2 \ge 10^2$ ssi $2n+3 \ge 10$ (car $2n+3 \ge 0$)

ssi $2n \ge 10-3$ ssi $2n \ge 7$ ssi $n \ge \frac{7}{2}$

ssi $n \ge 4$ car $n \in \mathbb{N}$.

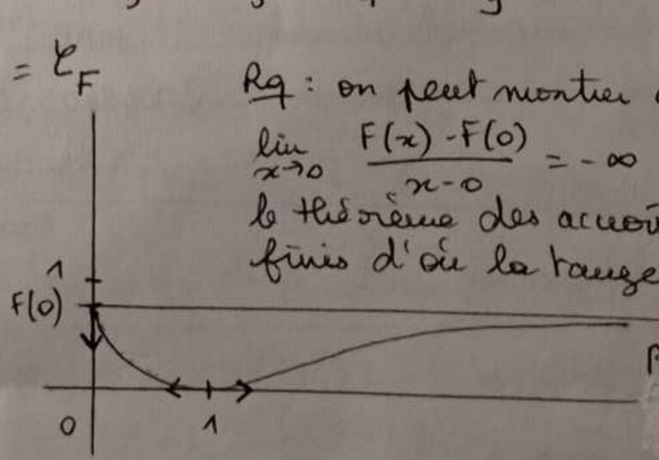
Une valeur approchée à 10^{-2} près de $F(0)$ est donc par exemple :

$$u_4 = \sum_{k=0}^{4} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} = 1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} \simeq 0{,}92$$

5) Voici l'allure de $\Gamma = \mathcal{C}_F$

x	0		1		$+\infty$
$f(x) = F'(x)$		$-$	0	$+$	
$F(x)$	$F(0)$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$F(0)$

tableau de variations résumant les questions 1 c) et 3 c) et 4 a)



Rq : on peut montrer que $\lim_{x\to 0} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = -\infty$ en utilisant le théorème des accroissements finis d'où la tangente à Γ verticale au point d'abscisse 0.

Ex 2

① • $\lim_{t\to0} \frac{sh t}{t} = \lim_{t\to0} \frac{sh t - sh 0}{t-0} = sh'(0)$ car sh est dérivable en 0

donc $\lim_{t\to0} \frac{sh t}{t} = ch(0) = 1$. Ainsi $\lim_{t\to0} g(t) = g(0)$ et g est continue en 0

De plus g est continue sur $\mathbb{R}^*$ en tant que quotient défini de fonctions continues. Donc <u>g est continue sur $\mathbb{R}$</u>

• Soit $x \in \mathbb{R}$. - si $x \geq 0$ alors $[x, 2x] \subset \mathbb{R}$ donc, comme g est continue sur $\mathbb{R}$, g est continue sur $[x, 2x]$ et le nombre $\int_x^{2x} g(t)dt$ existe.

- si $x < 0$ alors $[2x, x] \subset \mathbb{R}$ donc comme g est continue sur $[2x, x]$, le nombre $\int_{2x}^{x} g(t)dt$ existe donc $\int_x^{2x} g(t)dt = -\int_{2x}^{x} g(t)dt$ existe aussi

Dans les 2 cas, $f(x)$ existe.

<u>Concl : f est bien définie sur $\mathbb{R}$.</u>

• Soit $x \in \mathbb{R}$. $-x \in \mathbb{R}$ changement de variable $u = -t$

$\phi : t \mapsto -t$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et strictement décroissante sur $\mathbb{R}$. $du = -dt$

et $f(-x) = \int_{-x}^{-2x} g(t)dt = \int_x^{2x} g(-u)(-du) = -\int_x^{2x} g(u)\,du = -f(x)$

g est paire donc $g(-u) = g(u)$.

En effet, pour tout $u \in \mathbb{R}$,

$g(-u) = \frac{sh(-u)}{-u} = \frac{-sh u}{-u} = \frac{sh u}{u} = g(u)$

<u>Donc f est impaire</u>

② Comme g est continue sur $\mathbb{R}$, g admet des primitives sur $\mathbb{R}$

Soit $G : x \mapsto \int_1^x g(t)dt$, la primitive de g sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 1

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $f(x) = \int_x^{2x} g(t)dt = \int_x^1 g(t)dt + \int_1^{2x} g(t)dt$ par la relation de Chasles

ainsi $f(x) = -\int_1^x g(t)dt + \int_1^{2x} g(t)dt = -G(x) + G(2x)$

Comme G est une primitive de g sur $\mathbb{R}$, G est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $G' = g$ sur $\mathbb{R}$.

En tant que somme et composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, <u>f est dérivable sur $\mathbb{R}$</u>

$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = -G'(x) + 2\times G'(2x) = -g(x) + 2g(2x)$

<u>$\forall x \in \mathbb{R}^*$</u>, $f'(x) = -\frac{sh x}{x} + 2\frac{sh(2x)}{2x} = -\frac{sh x}{x} + \frac{sh 2x}{x} = \boxed{\frac{sh 2x - sh x}{x}}$

et si $x=0$ alors $f'(0) = -g(0) + 2g(2\times 0) = -1 + 2\times 1 = 1$

$\boxed{f'(0)=1}$

③ Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Alors $x < 2x$

donc $sh(x) < sh(2x)$ } sh strictement croissante sur $\mathbb{R}$

donc $0 < sh(2x) - sh(x)$

donc $0 < \dfrac{sh(2x)-sh(x)}{x}$ } $x>0$

donc $0 < f'(x)$.

ainsi :

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	1	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	

$f(0) = \int_0^0 g(t)\,dt = 0$

Déterminons $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \int_x^{2x} \dfrac{sh\,t}{t}\,dt$.

Soit $x>0$.

Soit $t\in[x,2x]$ alors $x \le t \le 2x$

donc $sh\,x \le sh\,t \le sh(2x)$

donc $\dfrac{sh\,x}{t} \le \dfrac{sh\,t}{t} \le \dfrac{sh(2x)}{t}$

on intègre l'inégalité de gauche. Il vient :

$\int_x^{2x} \dfrac{sh\,x}{t}\,dt \le \int_x^{2x} \dfrac{sh\,t}{t}\,dt$ par croissance de l'intégrale avec $x < 2x$

or $\int_x^{2x} \dfrac{sh\,x}{t}\,dt = sh\,x \int_x^{2x} \dfrac{dt}{t} = sh\,x\,[\ln t]_x^{2x} = sh\,x\,(\ln 2x - \ln x)$

$= sh\,x\left(\ln\left(\dfrac{2x}{x}\right)\right) = sh\,x \times \ln 2$

Donc $sh(x)\times\ln 2 \le \int_x^{2x} \dfrac{sh\,t}{t}\,dt = f(x)$.

or $\lim\limits_{x\to+\infty} sh(x)\times \ln 2 = +\infty$ donc par le théorème de comparaison des limites, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Comme f est impaire, on obtient $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et le tableau :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$