TD 10 : Equations différentielles

▶ Exercice 1 : Résoudre sur l'intervalle proposé les équations suivantes :

1. $xy' + y = xe^x$ sur $\mathbf{R}_+^*$
2. $y' - 2xy = xe^{3x^2}$ sur $\mathbf{R}$
3. $(1+x^2)^2 y' + 2xy = xe^{\frac{1}{(1+x^2)}}$ sur $\mathbf{R}$
4. $y' + y \tan x = \cos^2 x$ sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$
5. $y' - y = x^2 + 2x - 1$ sur $\mathbb{R}$
6. $y' - y = \cos x$ sur $\mathbb{R}$
7. $y' - y = e^{2x}$ sur $\mathbb{R}$
8. $y' - y = x^2 + 2x - 1 + \cos x + e^{2x} + xe^x$

▶ Exercice 2 Résoudre sur $\mathbf{R}$ les équations suivantes :

1. $y'' - 3y' + 2y = 0$
2. $y'' - 2y' - 3y = 0$
3. $y'' + 4y' + 4y = 0$
4. $4y'' - 4y' + y = 0$
5. $y'' + y' + y = 0$
6. $y'' - 2y' + 2y = 0$
7. $y'' - 2y' - 8y = x + 1 + e^{-2x}$
8. $y'' - 2y' + y = x^2 + \cos x$
9. $y'' + y = \cos x + x + 1$

▶ Exercice 3 Résoudre sur l'intervalle proposé les équations suivantes avec les conditions initiales proposées :

1. $y' \cos x - y \sin x = 0$ sur $]-\pi/2, \pi/2[$ avec $y(0) = 1$
2. $y' x \ln x - y = 0$ sur $]1, +\infty[$ avec $y(e) = 1$
3. $y' + xy = 2x$ sur $\mathbf{R}$ avec $y(0) = 1$
4. $y'' - 3y' + 2y = 0$ avec $y(0) = 1$ et $y'(0) = -1$

▶ Exercice 4 : Déterminer les solutions réelles des équations suivantes :

1. $xy' - y = x^3$ sur $\mathbb{R}_+^*$. La résoudre ensuite sur $\mathbb{R}_-^*$ puis sur $\mathbb{R}$ si possible (on raisonnera par analyse-synthèse).
2. $|x|y' + y = 1$ sur $\mathbb{R}_+^*$. La résoudre ensuite sur $\mathbb{R}_-^*$ puis sur $\mathbb{R}$ si possible (on raisonnera par analyse-synthèse).

▶ Exercice 5 : Intégrer $y'' - 3y' + 2y = x^3$.

▶ Exercice 6 : On considère l'équation (E) : $xy'' + 2y' + xy = 0$.

1. Montrer que la fonction ϕ définie sur $]0, \pi[$ par $\phi(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ est une solution réelle de (E) sur l'intervalle $]0, \pi[$.
2. Déterminer les solutions réelles de (E) sur $]0, \pi[$ en posant $y = \phi z$.
3. Déterminer les solutions réelles de (E) sur $[0, \pi]$ puis sur $[0, 2\pi]$.

▶ Exercice 7 : Résoudre les équations différentielles

1. $x^2 y'' + xy' + y = 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$ en posant $x = e^t$.
2. $x^2 y'' + xy' - y = x^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ en faisant le changement de variable $t = \ln x$.
3. $(x^2+1)^2 y'' + 2(x-1)(1+x^2)y' + y = 0$ sur $\mathbb{R}$ en faisant le changement de variable $t = \arctan x$.

▶ Exercice 8 :On considère l'équation différentielle (E) : $(1+e^x)y'' + 2e^x y' + (2e^x+1)y = xe^x$.

1. Soit une application $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable. On pose $z(x) = (1+e^x)y(x)$ pour tout réel x. Démontrer que y est solution de (E) sur $\mathbb{R}$ si et seulement si z est solution sur $\mathbb{R}$ d'une équation différentielle (F) à déterminer.
2. Résoudre (F) puis (E) sur $\mathbb{R}$.

► Exercice 9 :Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $(E) : (1+e^x)y'' - e^x y = 0$.
Indication : poser $z = y + y'$.

► Exercice 10 : Déterminer les fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = f(-x)$.