Chapitre 10 : Equations différentielles

Lors de la résolution d'une équation différentielle, il s'agira pour vous de reconnaître le type d'équation différentielle auquel vous êtes confronté, d'élaborer un plan d'étude et seulement ensuite de vous lancer dans les calculs.

Dans toute la suite I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ qui contient au moins deux points et $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$.
Les fonctions considérées sont à valeurs réelles ou complexes.

1 Equations différentielles linéaires du premier ordre

1.1 Définitions

Définition 1.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On appelle ***équation différentielle linéaire du premier ordre*** *toute équation (E) de la forme*

$$\forall t \in I, y'(t) + a(t)y(t) = b(t)$$

où l'inconnue est une fonction $y : I \to \mathbb{K}$, et où a, b sont deux fonctions continues définies de I dans $\mathbb{K}$.
On appelle ***solution*** *de (E) toute fonction $y : I \to \mathbb{K}$ dérivable sur I et telle que*

$$\forall t \in I, \ f'(t) + a(t)f(t) = b(t)$$

On appelle ***équation différentielle homogène associée*** *à (E) l'équation (E_H)*

$$\forall t \in I, y'(t) + a(t)y(t) = 0$$

*On parle aussi d'****équation sans second membre****.*
Lorsque les fonctions a, b sont contantes sur I, on dit que (E) est ***à coefficients constants****.*

Remarque 1. *Afin d'alléger les notations, on note souvent*

$$y' + a(t)y = b(t)$$

ou même

$$y' + ay = b$$

au lieu de (E). Néanmoins, il faut garder en tête qu'en général, a, b et y sont des fonctions et pas des constantes !

1.2 Structure algébrique de l'ensemble des solutions

Propriété 1.

L'ensemble S_H des solutions de (E_H) est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $D(I, \mathbb{K})$ des fonctions dérivables de I dans $\mathbb{K}$. Cela signifie que S_H est non vide et que si f et g sont deux éléments de S_H, toute combinaison linéaire de f et de g est élément de S_H.

Propriété 2.

Soit S l'ensemble des solutions de (E) et y_P une solution de (E). Alors $S = y_P + S_H = \{y_P + y_H, y_H \in S_H\}$.
La forme des solutions de (E) est donc la somme d'une solution particulière de (E) et de la solution générale de l'équation homogène (E_H).

Remarque 2. *On dit alors que S est un* ***espace affine****, dirigé par l'espace vectoriel S_H et passant par le "point" y_P.*

De plus, cette proposition signifie que si on connait les solutions de (E_H) et une solution de (E), alors on a toutes les solutions de (E).

1.3 Résolution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre

1.3.1 Résolution de l'équation sans second membre

$(E_H)\ :\ y' + ay = 0$ où $a \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{K})$.

Propriété 3.

> *L'ensemble des solutions de (E_H) est*
> $$S_H = \{t \mapsto \lambda e^{-A(t)},\ \lambda \in \mathbb{K}\}$$
> *où A est une primitive quelconque de la fonction a.*

Remarque 3. *On a vu que S_H est un espace vectoriel. Cette propriété signifie que la fonction $t \mapsto e^{-A(t)}$* ***engendre*** *S_H, c'est-à-dire que* ***toute solution de (E_H) est multiple par un scalaire (i.e. un élément de $\mathbb{K}$) de la fonction*** *$t \mapsto e^{-A(t)}$. On dit alors que S_H est un sous-espace vectoriel de dimension 1 (droite vectorielle) de l'espace vectoriel $D(I, \mathbb{K})$, et que la famille contenant le seul élément $t \mapsto e^{-A(t)}$ en est une* ***base****.*

▶ Exemples :Résoudre $y' + y\cos x = 0$ et $\left(1 + x^2\right) y' - y = 0$ sur $\mathbb{R}$.

Remarque 4. *Pour résoudre une équation du type $y' + ay = 0$, les physiciens procèdent comme ceci :*

$$y' + ay = 0 \iff \frac{y'}{y} = -a \iff \ln(|y|) = -\int a + \lambda \iff y = \mu e^{-A}$$

Ceci n'est pas rigoureux, puisqu'on ne sait pas a priori si la fonction y s'annule, donc on ne peut pas a priori écrire $\dfrac{y'}{y}$. Néanmoins, la théorie mathématique assure que les fonctions trouvées par cette "méthode" sont bien les solutions de $y' + ay = 0$.

On peut considérer cette méthode comme étant un moyen mnémotechnique de retrouver la forme des solutions d'une équation du type $y' + ay = 0$.

1.3.2 Résolution théorique de (E)

Propriété 4.

> *L'ensemble des solutions de (E) est donné par $F = \left\{(\lambda + B_1)\, e^{-A}\ ;\ \lambda \in \mathbb{K}\right\}$ où A est une primitive de a et B_1 une primitive de be^A.*

Remarque 5. *Dans la pratique, plutôt que d'appliquer cette propriété, on commencera par rechercher s'il existe une solution particulière (plus ou moins évidente) y_P puis on utilisera la structure algébrique de l'ensemble des solutions de (E).*

1.3.3 Comment trouver une solution particulière de (E) ?

Il existe trois méthodes :

— éventuellement (E) possède une solution évidente φ

▶ Exemple : $(E) : y' + x^2 y = x^2$ admet l'application constante égale à 1 comme solution évidente.

Remarque 6. *Souvent en physique, on connaît une solution particulière; par exemple si on s'intéresse à la charge q d'une armature de condensateur dans un circuit R, C alimenté par un générateur de tension délivrant une tension E, q vérifie l'équation différentielle linéaire $\dfrac{q}{c} + R\dfrac{dq}{dt} = E$. Lorsque E est constante, le condensateur est chargé, donc $\dfrac{dq}{dt} = 0$, d'où $q = CE$. Ainsi $q = CE$ est une solution particulière, et donc les solutions générales sont du type $q\,(t) = CE + \lambda e^{-\frac{t}{RC}}$; le terme CE correspond alors au régime stationnaire ou permanent et le terme $\lambda e^{-\frac{t}{RC}}$ correspond au régime transitoire.*

— Principe de superposition des solutions

Propriété 5.

Si le second membre b est du type $b = \sum_{k=1}^{n} b_k$, avec chaque b_k application continue sur I, on note y_{P_k} une solution particulière de $(E_k) : y' + ay = b_k$. En posant $y_P = \sum_{k=1}^{n} y_{P_k}$, on obtient une solution particulière de (E).

► Exemple : $(E) : y' + y = \sin + \cos + \mathrm{Id}$.
On décompose $x \mapsto \sin x + \cos x + x$ en $\beta_1 : x \mapsto \sin x + \cos x$ et $\beta_2 : x \mapsto x$.
Troisième méthode si les deux précédentes ont échoué :

— Méthode de variation de la constante
On cherche une solution particulière sous la forme $t \mapsto \lambda(t)\, e^{-A(t)}$. avec λ dérivable sur I.
On pose $y_P = e^{-A}$.
λy_P est solution de (E) si et seulement si $\lambda' y_P + \lambda y'_P + a\lambda y_P = b$.
Or$\lambda y'_P + a\lambda y_P = 0$,
Donc λy_P est solution de (E) si et seulement si $\lambda' y_P = b$ si et seulement si $\lambda' = be^A$
On détermine alors une primitive B de be^A et alors Be^{-A} est une solution particulière de (E).
► Exemple : Soit l'équation différentielle linéaire $(E) \ : \ y'(t) - \dfrac{1}{1-t} y(t) = \dfrac{t}{1-t}$ sur $]1, +\infty[$.

1.4 Problème de Cauchy

Le plus souvent, on doit chercher les solutions d'une équation différentielle $y' = f(t, y)$ vérifiant une condition initiale du type $y(t_0) = y_0$. C'est ce que l'on appelle un **problème de Cauchy**. Graphiquement, cela revient à chercher les courbes intégrales[1] passant par le point de coordonnées (t_0, y_0).

Soit $(E) : y' + ay = b$, où a, b sont des applications continues sur I.

Propriété 6 (Problème de Cauchy - résolution avec condition initiale).

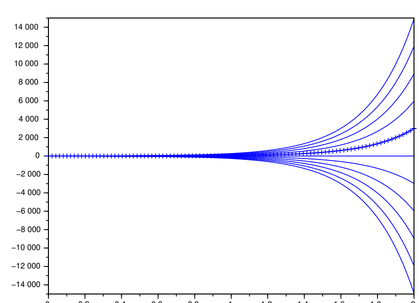
Si $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{K}$, il existe une unique solution f de (E) telle que $f(t_0) = y_0$.

Remarque 7 (Interprétation graphique). *Graphiquement, si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, cette proposition signifie que par tout point du plan dont l'abscisse est dans I, il passe une et une seule courbe intégrale.*

Propriété 7.

Si $\alpha \in \mathbb{C}$, la fonction $t \mapsto e^{\alpha t}$ est l'unique fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant le problème de Cauchy : $y' = \alpha y$ avec la condition initiale $y(0) = 1$.

Représentation de la famille des courbes représentatives des solutions d'une équation différentielle du premier ordre : exemple de l'équation $y' = 4y$.



1. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on appelle courbes intégrales de l'équation différentielle les représentations graphiques de ses solutions

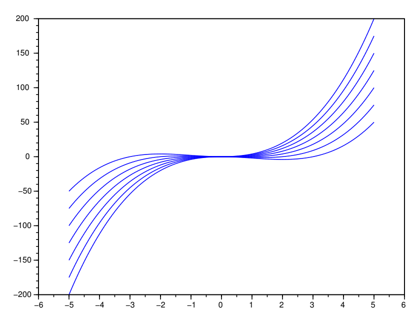
1.5 Cas où a n'est pas définie : problème des raccords

Supposons pour simplifier que a n'est pas définie en un seul point x_0 de $\mathbb{R}$. On résout sur chacun des deux intervalles $I_1 =]-\infty, x_0[$ et $I_2 =]x_0, +\infty[$, puis on cherche si on peut **"raccorder"** au point x_0 les solutions précédentes. Une application $y : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ est solution de (E) sur $\mathbb{R}$ si :

— la restriction y_1 de y à $]-\infty, x_0[$ est solution de (E) sur $]-\infty, x_0[$,
— la restriction y_2 de y à $]x_0, +\infty[$ est solution de (E) sur $]x_0, +\infty[$,
— y_1 admet une limite finie l_1 en x_0^-,
— y_2 admet une limite finie l_2 en x_0^+,
— $l_1 = l_2$ (on dit alors qu'il y a <u>raccord par continuité</u> en x_0),
— $\dfrac{y_1(x) - l_1}{x - x_0}$ admet une limite finie l'_1 quand x tend vers x_0^-,
— $\dfrac{y_2(x) - l_2}{x - x_0}$ admet une limite finie l'_2 quand x tend vers x_0^+,
— $l'_1 = l'_2$ (on dit alors qu'il y a <u>raccord par dérivabilité</u> en x_0),
— $l'_1 + a(x_0) l_1 = b(x_0)$.

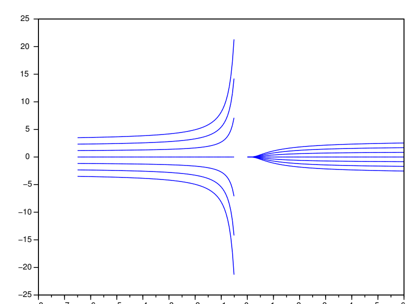
Il n'y a pas de règle générale sur le nombre de paramètres dont dépend la solution générale d'une équation différentielle (E) sur un intervalle I pour lequel a n'est pas définie en un point : l'ensemble des solutions peut être l'ensemble vide, un singleton ou un ensemble qui dépend d'un ou de deux paramètres (droite affine ou plan affine), comme le montrent les exemples suivants.

► Exemple : Résoudre l'équation $ty'(t) - 2y(t) = t^3$ sur $\mathbb{R}$.



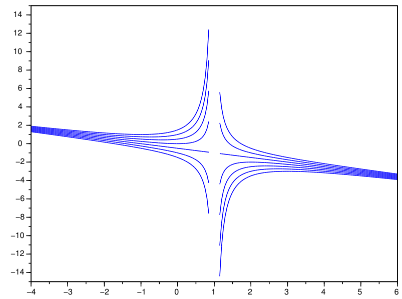
L'ensemble des solutions dépend de deux paramètres.

► Exemple : Résoudre l'équation $t^2 y'(t) - y(t) = 0$ sur $\mathbb{R}$.



L'ensemble des solutions dépend d'un seul paramètre.

► Exemple : Résoudre l'équation $(1-t)y'(t) - y(t) = t$ sur $\mathbb{R}$.



L'ensemble des solutions est un singleton. Il ne dépend d'aucun paramètre.

2 Equations différentielles linéaires du second ordre

Exemple : circuit RLC. On désigne par t le temps, par i l'intensité du courant dans le circuit et par q la charge de l'armature de gauche du condensateur. On a $i = \frac{dq}{dt}$. La différence de potentiel aux bornes de l'inductance (en série avec la résistance) est : $L\frac{di}{dt} = L\frac{d^2q}{dt^2}$. La loi des mailles appliquée au circuit permet d'écrire :

$$U = \frac{q}{C} + R\frac{dq}{dt} + L\frac{d^2q}{dt^2}.$$

le problème physique possède une double condition initiale qui décrit le circuit à l'instant $t = 0$. En général $q(0) = 0$ (condensateur non chargé) et $i(0) = \frac{dq}{dt}(0) = 0$.

2.1 Définition

Définition 2.

1. *On appelle* ***équation différentielle linéaire du deuxième ordre*** *toute équation (E) de la forme :*

$$ay'' + by' + cy = d$$

où l'inconnue est une fonction $y : I \to \mathbb{K}$ et où a, b ,c et d sont quatre applications ***continues*** *sur I avec a non identiquement nulle.*

2. *On appelle* ***solution*** *de (E) toute application de I dans $\mathbb{K}$* ***deux fois dérivable*** *sur I et telle que*

$$\forall t \in I,\ a(t)y''(t) + b(t)y'(t) + c(t)y(t) = d(t)$$

3. *Si d est identiquement nulle, on dit que (E) est une équation différentielle linéaire du deuxième ordre* ***homogène****. Sinon, on lui associe l'équation linéaire homogène d'ordre 2, $(E_H) : ay'' + by' + cy = 0$.*
4. *Lorsque les fonctions a, b ,c et d sont constantes sur I, on dit que (E) est à coefficients constants.*
5. *On appelle équation différentielle linéaire du second ordre* ***résolue en y''*** *ou* ***normalisée*** *toute équation différentielle du second ordre de la forme*

$$y'' + \alpha y' + \beta y = \gamma$$

où α, β et γ sont deux fonctions continues de I dans $\mathbb{K}$.

2.2 Structure algébrique de l'ensemble des solutions

Propriété 8.

> *L'ensemble S_H des solutions de (E_H) est un sous-espace vectoriel de l'ensemble $D^2(I,\mathbb{K})$ des applications deux fois dérivables sur I. Cela signifie que S_H est non vide et que S_H est stable par combinaison linéaire.*

Propriété 9.

> *Lorsque l'équation complète (E) admet une solution particulière y_P, l'ensemble des solutions de (E), noté S, est le sous-espace affine passant par y_P et dirigé par l'espace vectoriel S_H des solutions de (E_H) : $F = y_P + S_H = \{y_P + y_H, y_H \in S_H\}$.*

La solution générale de l'équation avec second membre est somme d'une solution particulière et de la solution générale de l'équation sans second membre.

2.3 Résolution des équations différentielles linéaires du deuxième ordre à coefficients constants :

On considère pour la suite l'équation différentielle linéaire (E) : $ay'' + by' + cy = d$, avec a, b, c constantes (éléments de $\mathbb{K}$), d une fonction continue à valeurs dans $\mathbb{K}$ et $a \neq 0$ et (E_H) son équation homogène associée.

2.3.1 Résolution de l'équation sans second membre

Propriété 10 (Equation caractéristique).

> *Pour $r \in \mathbb{C}$, la fonction $t \mapsto e^{rt}$ est solution de (E_H) ssi $ar^2 + br + c = 0$.*
> *L'équation $ar^2 + br + c = 0$ est appelée* ***équation caractéristique*** *de (E_H).*

Propriété 11 (Cas complexe).

> *Les* ***constantes*** *a, b, c sont* ***complexes*** *et on cherche les solutions à valeurs complexes.*
> — *Si l'équation caractéristique de (E_H) admet deux racines distinctes r_1 et r_2 dans $\mathbb{C}$, alors* $S_H = \mathit{Vect}\left(t \mapsto e^{r_1 t}, t \mapsto e^{r_2 t}\right) = \left\{t \longmapsto \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t}\ ;\ \lambda, \mu \in \mathbb{C}\right\}$
> — *Si l'équation caractéristique de (E_H) admet une racine double r, alors* $S_H = \mathit{Vect}\left(t \mapsto e^{rt}, t \mapsto te^{rt}\right) = \left\{t \longmapsto \lambda e^{rt} + \mu te^{rt}\ ;\ \lambda, \mu \in \mathbb{C}\right\}$.

Dans chacun des deux cas, les solutions de (E_H) sont combinaisons linéaires de deux solutions non proportionnelles : elles forment donc un plan vectoriel.

Propriété 12 (Cas réel).

> *Les* ***constantes*** *a, b, c sont* ***réelles*** *et on cherche les solutions à valeurs réelles.*
> 1. *Si l'équation caractéristique de (E_H) possède deux racines distinctes $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$, alors* $S_H = \mathit{Vect}_{\mathbb{R}}\left(t \mapsto e^{r_1 t},\ t \mapsto e^{r_2 t}\right) = \left\{t \longmapsto \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t}\ ;\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}\right\}$.
> 2. *Si l'équation caractéristique de (E_H) possède une racine double r, alors* $S_H = \mathit{Vect}_{\mathbb{R}}\left(t \mapsto e^{rt},\ t \mapsto te^{rt}\right) = \left\{t \longmapsto \lambda e^{rt} + \mu te^{rt}\ ;\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}\right\}$.
> 3. *Sinon l'équation caractéristique de (E_H) possède deux racines complexes conjuguées $\alpha \pm i\beta$, alors* $S_H = \mathit{Vect}_{\mathbb{R}}\left(t \mapsto e^{\alpha t}\cos(\beta t),\ t \mapsto e^{\alpha t}\sin(\beta t)\right) = \left\{t \longmapsto e^{\alpha t}(\lambda \cos \beta t + \mu \sin \beta t)\ ;\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}\right\}$

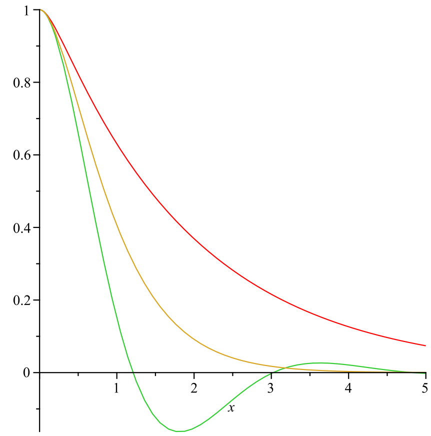
► Exemple : $y'' + \dfrac{\omega_0}{Q}y' + \omega_0^2 y = 0$ (pour un circuit RLC on a $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ et $Q = \dfrac{L\omega_0}{R}$).

L'équation caractéristique est ici $x^2 + \dfrac{\omega_0}{Q}x + \omega_0^2 = 0$, son discriminant est $\Delta = \omega_0^2\left(\dfrac{1}{Q^2} - 4\right)$. Le comportement des solutions dépend du signe de Δ :

— Si $Q < \dfrac{1}{2}$ le régime est apériodique

— Si $Q = \dfrac{1}{2}$, c'est le régime critique

— Si $Q > \frac{1}{2}$, le régime est pseudo-périodique.
Allure de trois courbes intégrales correspondant à une même valeur de ω_0 et aux conditions initiales $y(0) = y_0$ et $y'(0) = 0$:



► Exemples :Résoudre les équations différentielles suivantes sur $\mathbb{R}$:

1. $y'' - 3y' + 2y = 0$,
2. $y'' - 4y' + 4y = 0$,
3. $y'' + 2y' + 2y = 0$.

2.3.2 Solutions particulières de (E) lorsque le second membre est du type fonction polynomiale, $t \longmapsto Ae^{\lambda t}$ avec $(A, \lambda) \in \mathbb{C}^2$, $t \mapsto B\cos(\omega t)$ et $t \mapsto B\sin(\omega t)$ avec $(B, \omega) \in \mathbb{R}^2$

Propriété 13 (Cas où le second membre est une fonction polynomiale).

L'équation différentielle linéaire (E) : $ay'' + by' + cy = P(t)$, où P est un polynôme de degré $n \in \mathbb{N}$, possède une solution particulière de la forme

$$\begin{array}{l} y_P \ : \ t \mapsto Q(t), \ \text{où } Q \text{ est un polynôme de degré } n, \\ \ \text{si } 0 \text{ n'est pas racine de l'équation caractéristique de}(E_H), \ \text{c'est-à-dire si } c \neq 0, \\ y_P \ : \ t \mapsto tQ(t), \ \text{où } Q \text{ est un polynôme de degré } n, \\ \ \text{si } 0 \text{ est racine simple de l'équation caractéristique de}(E_H), \ \text{c'est-à-dire si } c = 0 \text{ et } b \neq 0, \\ y_P \ : \ t \mapsto t^2Q(t), \ \text{où } Q \text{ est un polynôme de degré } n, \\ \ \text{si } 0 \text{ est racine double de l'équation caractéristique de}(E_H), \ \text{c'est-à-dire si } c = 0 \text{ et } b = 0. \end{array}$$

Propriété 14 (Cas où le second membre est du type $t \longmapsto Ae^{\lambda t}$, avec $(A, \lambda) \in \mathbb{C}^2$).

L'équation différentielle linéaire (E) : $ay'' + by' + cy = Ae^{\lambda t}$ possède une solution particulière de la forme

$$\begin{array}{l} y_P \ : \ t \mapsto Ke^{\lambda t} \text{ si } \lambda \text{ n'est pas racine de l'équation caractéristique de}(E_H) \\ y_P \ : \ t \mapsto Kte^{\lambda t} \text{ si } \lambda \text{ est racine simple de l'équation caractéristique de}(E_H) \\ y_P \ : \ t \mapsto Kt^2e^{\lambda t} \text{ si } \lambda \text{ est racine double de l'équation caractéristique de}(E_H) \end{array}$$

où K est un nombre complexe à déterminer.

Propriété 15 (Cas où le second membre est du type $t \mapsto B\cos(\omega t)$ et $t \mapsto B\sin(\omega t)$ avec $(B, \omega) \in \mathbb{R}^2$).

L'équation différentielle linéaire $(E) : ay''+by'+cy = B\cos(\omega t)$ ou $ay''+by'+cy = B\sin(\omega t)$, avec $(B, \omega) \in \mathbb{R}^2$, possède une solution particulière de la forme

1. *si a, b et c sont réels,*

$$\begin{array}{lcl} y_P & : & t \mapsto K_1\cos(\omega t) + K_2\sin(\omega t) \text{ si } i\omega \text{ n'est pas racine de l'équation caractéristique de}(E_H) \\ y_P & : & t \mapsto K_1 t\cos(\omega t) + K_2 t\sin(\omega t) \text{ si } i\omega \text{ est racine de l'équation caractéristique de}(E_H) \end{array}$$

   où K est un nombre complexe à déterminer.

2. *si a, b et c sont complexes,*
   (a) *si le second membre est du type $t \mapsto B\cos(\omega t)$, y_P est la somme d'une solution particulière de $(E_1) : ay'' + by' + cy = \dfrac{B}{2}e^{i\omega t}$ et d'une solution particulière de $(E_2) : ay'' + by' + cy = \dfrac{B}{2}e^{-i\omega t}$.*
   (b) *si le second membre est du type $t \mapsto B\sin(\omega t)$, y_P est la différence d'une solution particulière de $(E_1) : ay'' + by' + cy = \dfrac{B}{2}e^{i\omega t}$ et d'une solution particulière de $(E_2) : ay'' + by' + cy = \dfrac{B}{2}e^{-i\omega t}$.*

Le résultat du deuxième item de cette propriété découle de la formule d'Euler et du principe de superposition ci-dessous. Le résultat du deuxième item peut se retrouver en passant aux complexes : une solution particulière réelle de $(E) : ay'' + by' + cy = B\cos(\omega t)$ est obtenue en prenant la partie relle d'une solution particulière de $ay'' + by' + cy = Be^{i\omega t}$; une solution particulière réelle de $(E) : ay'' + by' + cy = B\sin(\omega t)$ est obtenue en prenant la partie imaginaire d'une solution particulière de $ay'' + by' + cy = Be^{i\omega t}$.
► Exemple : Résoudre sur $\mathbb{R}$ $(E) : y'' - 4y' + 3y = 2e^t$
► Exemple : Chercher les solutions réelles de $(E) : y'' + y = 5sin(2t)$.

2.4 Principe de superposition

Propriété 16.

Si $d = \sum_{k=1}^{n} d_k$, soit y_{P_k} une solution particulière de $(E_k) : ay'' + by' + cy = d_k$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$; alors $y_P = \sum_{k=1}^{n} y_{P_k}$ est solution particulière de (E).

Remarque 8. *On peut résoudre des équations différentielles linéaires dont le second membre est de type $t \longmapsto \cos t$ ou $t \longmapsto \sin t$ (ou $t \longmapsto cht$ ou $t \longmapsto sht$) en utilisant la propriété précédente.*

► Exemple : Chercher les solutions réelles de $(E) : y'' + y = 2\cos t + 5\sin(2t)$.
► Exemple : Chercher les solutions complexes de $y'' + \sqrt{3}iy' - iy = 3\cos(2t)$.

2.5 Problème de Cauchy

Soient a, b et c trois éléments de $\mathbb{K}$, avec $a \neq 0$, et l'équation différentielle (E) :

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = d(t)$$

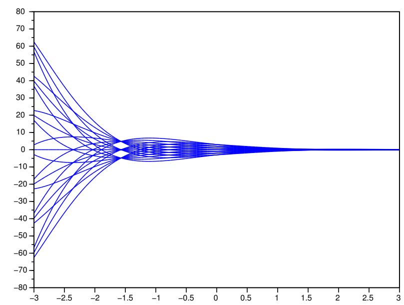
où d est une fonction continue sur un intervalle I.
On suppose que (E) admet au moins une solution particulière y_P.

Propriété 17.

Soit $t_0 \in I$, $y_0 \in \mathbb{K}$ et $y'_0 \in \mathbb{K}$. Il existe une unique solution f de (E) vérifiant les conditions

$$\left\{\begin{array}{l} f(t_0) = y_P \\ f'(t_0) = y'_P \end{array}\right.$$

Représentation de la famille des courbes représentatives des solutions d'une équation différentielle d'ordre 2 : exemple de l'équation $y'' + 2y' + 2y = 0$



On peut tracer les courbes sur $[-1, 1]$ et distinguer l'unique courbe intégrale qui correspond aux conditions initiales $y(0) = 1$ et $y'(0) = -1$ et aux valeurs suivantes des constantes A et B : $A = 1$ et $B = 0$.