Exercice 1

① ⓐ arctan est continue sur $\mathbb{R}$ donc elle admet des primitives sur $\mathbb{R}$

$\int \arctan x \, dx = \int 1 \times \arctan x \, dx$

Soit $x \in \mathbb{R}$

$u(x) = \arctan x \quad u'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

$v(x) = x \quad v'(x) = 1$

u et v sont $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ donc on peut faire une IPP :

On reconnaît la forme $\frac{u'}{u}$

$\int 1 \times \arctan x \, dx = x \arctan x - \int \frac{x}{1+x^2} dx = x\arctan x - \frac{1}{2} \int \frac{2x}{1+x^2} dx$

$= x\arctan x - \frac{1}{2} \ln|1+x^2| + c, \ c \in \mathbb{R}$

Une primitive de arctan sur $\mathbb{R}$ est : $x \mapsto x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$

① ⓑ • Résolution de l'équation homogène associée à (E) :

(EH) : $y'(x) + \frac{1}{x} y(x) = 0$

$a : x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ donc elle admet des primitives sur $\mathbb{R}_+^*$

$A : x \mapsto \ln x$ est l'une d'entre elles.

D'après le cours, $S_H = \{ x \mapsto \lambda e^{-\ln x}, \lambda \in \mathbb{R} \} = \{ x \mapsto \lambda e^{\ln \frac{1}{x}}, \lambda \in \mathbb{R} \}$

$$\boxed{S_H = \{ x \mapsto \frac{\lambda}{x}, \lambda \in \mathbb{R} \}}$$

• Cherchons une solution particulière de (E) par la méthode de variation de la constante sous la forme $y_p : x \mapsto \frac{\lambda(x)}{x}$ où λ est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Alors y_p est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$

et y_p est solution de (E) ssi $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $y_p'(x) + \frac{1}{x} y_p(x) = \frac{\arctan x}{x}$

ssi $\forall x > 0$, $\frac{\lambda'(x) \times x - \lambda(x) \times 1}{x^2} + \frac{1}{x} \times \frac{\lambda(x)}{x} = \frac{\arctan x}{x}$

ssi $\forall x > 0$ $\frac{\lambda'(x)}{x} - \frac{\lambda(x)}{x^2} + \frac{\lambda(x)}{x^2} = \frac{\arctan x}{x}$

ssi $\forall x > 0$ $\lambda'(x) = \arctan x$

On propose par exemple $\lambda(x) = x\arctan x - \frac{1}{2}(\ln(1+x^2))$ d'après ①ⓑ

Ainsi $y_p : x \mapsto \frac{x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)}{x}$

• L'ensemble des solutions de (E) est :

$$\boxed{S = \{ x \mapsto \arctan x - \frac{1}{2x} \ln(1+x^2) + \frac{\lambda}{x}, \lambda \in \mathbb{R} \}}$$

② ⓐ La matrice augmentée associée à S lorsque $\underline{a=-2}$ est :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 2 & 3 \end{array}\right) \underset{\substack{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_1}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 4 & 1 \end{array}\right) \underset{L_3 \leftarrow L_3 + 4L_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right)$$

le système associé à cette matrice augmentée est $\begin{cases} x+y-z=1 \\ y-z=1 \\ 0=-3 \end{cases}$

$\boxed{S=\emptyset}$ car $0 \neq -3$

ⓑ La matrice augmentée associée à S lorsque $\underline{a=3}$ est :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 3 \end{array}\right) \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \end{array}\right) \underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

le rang de cette matrice augmentée est 2 (2 pivots) il y a donc $3-2=1$ inconnue secondaire et 1 équation secondaire.

Le système associé à cette matrice augmentée est $\begin{cases} x+y-z=1 \\ y+4z=1 \end{cases}$

ssi $\begin{cases} x = 1+z-y = 1+z-(1-4z) \\ y = 1-4z \end{cases}$ ssi $\begin{cases} x = 5z \\ y = 1-4z \\ z \in \mathbb{R} \end{cases}$ ssi $\begin{cases} x = 0+5z \\ y = 1-4z \\ z = 0+z \end{cases}$ $z \in \mathbb{R}$

ssi $\begin{cases} x = 0+5t \\ y = 1-4t \\ z = 0+t \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$

$\boxed{S = \{(5z, 1-4z, z),\ z \in \mathbb{R}\}}$

ⓒ La matrice augmentée associée à S lorsque $\underline{a \in \mathbb{R} \setminus \{-2,3\}}$ est :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & a & 2 \\ 2 & a & 2 & 3 \end{array}\right) \underset{\substack{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_1}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & a+1 & 1 \\ 0 & a-2 & 4 & 1 \end{array}\right) \underset{L_3 \leftarrow L_3 - (a-2)L_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & a+1 & 1 \\ 0 & 0 & 4-(a-2)(a+1) & 1-(a-2) \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & a+1 & 1 \\ 0 & 0 & (a+2)(3-a) & 3-a \end{array}\right)$$

car $4-(a-2)(a+1) = 4-(a^2+a-2a-2)$
$= 4-a^2+a+2$
$= -a^2+a+6$
$= -(a^2-a-6)$
$= -(a+2)(a-3)$
$= (a+2)(3-a)$

le système associé à cette matrice augmentée est :

$\begin{cases} x+y-z=1 \\ y+(a+1)z=1 \\ (a+2)(3-a)z = 3-a \end{cases}$ ssi $a \neq 3$ $\begin{cases} x = 1-y+z = 1-\frac{1}{a+2}+\frac{1}{a+2} = 1 \\ y = 1-(a+1)z = 1-\frac{a+1}{a+2} = \frac{1}{a+2} \\ z = \frac{3-a}{(a+2)(3-a)} = \frac{1}{a+2} \end{cases}$

Ainsi $\boxed{S = \left\{\left(1, \frac{1}{a+2}, \frac{1}{a+2}\right)\right\}}$

ⓓ <u>lorsque $a=-2$</u>, $S=\emptyset$ car les 3 équations correspondent à trois plans qui se coupent deux à deux mais sans point d'intersection commun.

<u>lorsque $a=3$</u>, S est la droite qui passe par $A(0,1,0)$ et qui a pour vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$. Les trois plans se coupent selon une même droite.

<u>lorsque $a \in \mathbb{R} \setminus \{-2,3\}$</u>, S est le point $B\left(1, \frac{1}{a+2}, \frac{1}{a+2}\right)$ car les 3 équations correspondent à trois plans dont l'intersection est B

Exercice 2

① $I_0 = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx = [\arctan x]_0^1 = \arctan 1 - \arctan 0 = \frac{\pi}{4} - 0 = \boxed{\frac{\pi}{4}}$

$I_1 = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}dx = \left[\frac{\ln(1+x^2)}{2}\right]_0^1 = \frac{\ln 2}{2} - \frac{\ln 1}{2} = \boxed{\frac{\ln 2}{2}}$

② Soit $p \geq 0$

$I_p + I_{p+2} = \int_0^1 \frac{x^p}{1+x^2}dx + \int_0^1 \frac{x^{p+2}}{1+x^2}dx = \int_0^1 \frac{x^p + x^{p+2}}{1+x^2}dx$ par linéarité de l'intégrale

$= \int_0^1 \frac{x^p(1+x^2)}{1+x^2}dx = \int_0^1 x^p dx = \left[\frac{x^{p+1}}{p+1}\right]_0^1 = \boxed{\frac{1}{p+1} = I_p + I_{p+2}}$

Si $p=0$ alors $I_0 + I_2 = 1$ donc $I_2 = 1 - I_0 = \boxed{1 - \frac{\pi}{4}}$

Si $p=1$ alors $I_1 + I_3 = \frac{1}{2}$ donc $I_3 = \frac{1}{2} - I_1 = \frac{1}{2} - \frac{\ln 2}{2} = \boxed{\frac{1-\ln 2}{2}}$

③ Soit $q \in \mathbb{N}^*$

$\sum_{k=1}^{q} (-1)^{k+1}(I_{2k-1} + I_{2k+1}) = \sum_{k=1}^{q} (-1)^{k+1} \frac{1}{2k-1+1}$ d'après ② 2 avec $p = 2k-1$

donc $\sum_{k=1}^{q} (-1)^{k+1}(I_{2k-1} + I_{2k+1}) = \sum_{k=1}^{q} (-1)^{k+1} \frac{1}{2k} = \boxed{\frac{1}{2}u_q}$ par linéarité de la somme

D'autre part $\sum_{k=1}^{q} (-1)^{k+1}(I_{2k-1} + I_{2k+1}) = \sum_{k=1}^{q} (-1)^{k+1} I_{2k-1} + \sum_{k=1}^{q} (-1)^{k+1} I_{2k+1}$

par linéarité de la somme

changement d'indice $j = k+1$ dans la 2e somme

$= \sum_{k=1}^{q} (-1)^{k+1} I_{2k-1} + \sum_{j=2}^{q+1} (-1)^{j} I_{2(j-1)+1}$

$= \sum_{k=1}^{q} (-1)^{k+1} I_{2k-1} + \sum_{j=2}^{q+1} (-1)^{j} I_{2j-1}$

$= (-1)^{1+1} I_{2\times 1-1} + \sum_{k=2}^{q} (-1)^{k+1} I_{2k-1} + \sum_{k=2}^{q} (-1)^{k} I_{2k-1} + (-1)^{q+1} I_{2(q+1)-1}$

$= 1 \times I_1 + \sum_{k=2}^{q} \underbrace{\left((-1)^{k+1} I_{2k-1} + (-1)^{k} I_{2k-1}\right)}_{=0} + (-1)^{q+1} I_{2q+1}$

$= \boxed{\frac{\ln 2}{2} + (-1)^{q+1} I_{2q+1}}$

Donc $\frac{1}{2}u_q = \frac{\ln 2}{2} + (-1)^{q+1} I_{2q+1}$ donc $u_q = \ln 2 + 2(-1)^{q+1} I_{2q+1}$

donc $\boxed{u_q + 2(-1)^q I_{2q+1} = \ln 2}$

④ Soit $x \in [0,1]$, $0 \leq x^p$ et $1 \leq 1+x^2 \leq 2$ donc $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{1+x^2} \leq 1$

Donc $\frac{x^p}{2} \leq \frac{x^p}{1+x^2} \leq x^p$ et par croissance de l'intégrale,

$\int_0^1 \frac{x^p}{2}dx \leq \int_0^1 \frac{x^p}{1+x^2}dx \leq \int_0^1 x^p dx$ donc $\left[\frac{x^{p+1}}{2(p+1)}\right]_0^1 \leq I_p \leq \left[\frac{x^{p+1}}{p+1}\right]_0^1$

Ainsi $\boxed{\frac{1}{2(p+1)} \leq I_p \leq \frac{1}{p+1}}$

or $\lim_{p\to+\infty} \frac{1}{2(p+1)} = \lim_{p\to+\infty}\frac{1}{p+1} = 0$ donc par le théorème des gendarmes,

$(I_p)_{p\geq 0}$ converge et $\boxed{\lim_{p\to+\infty} I_p = 0}$

5 D'après 3 $\forall q \geq 1$, $u_q + 2(-1)^q I_{2q+1} = \ln 2$

or $-I_{2q+1} \leq (-1)^q I_{2q+1} \leq I_{2q+1}$ $\forall q \geq 1$

donc par le théorème des gendarmes, comme $\lim_{q\to+\infty} I_{2q+1} = 0$ (q4),

on affirme que $\left((-1)^q I_{2q+1}\right)_{q\geq 1}$ converge et sa limite vaut 0.

Ainsi $\boxed{\lim_{q\to+\infty} u_q = \ln 2}$

6 $I_p = \int_0^1 \frac{x^p}{1+x^2}dx$

on pose $u(x) = \frac{1}{1+x^2}$ $u'(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$ pour $x\in[0,1]$

$v(x) = \frac{x^{p+1}}{p+1}$ $v'(x) = x^p$

u et v sont $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$

$I_p = \left[\frac{1}{1+x^2}\frac{x^{p+1}}{p+1}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^{p+1}}{p+1}\times\frac{-2x}{(1+x^2)^2}dx$

$I_p = \frac{1}{2(p+1)} + \frac{2}{p+1}\int_0^1 \frac{x^{p+2}}{(1+x^2)^2}dx$

$I_p = \frac{1}{2(p+1)} + \frac{2}{p+1}\int_0^1 \frac{x^p(1+x^2) - x^p}{(1+x^2)^2}dx$

$I_p = \frac{1}{2(p+1)} + \frac{2}{p+1}\left(\int_0^1 \frac{x^p\cancel{(1+x^2)}}{(1+x^2)^{\cancel{2}}}dx - \int_0^1\frac{x^p}{(1+x^2)^2}dx\right)$

$I_p = \frac{1}{2(p+1)} + \frac{2}{p+1}\left(I_p - \int_0^1 \frac{x^p}{(1+x^2)^2}dx\right)$

$I_p\frac{p-1}{p+1} = I_p\left(1-\frac{2}{p+1}\right) = \frac{1}{2(p+1)} - \frac{2}{p+1}\int_0^1\frac{x^p}{(1+x^2)^2}dx$

$I_p = \frac{p+1}{p-1}\times\frac{1}{2(p+1)} - \frac{2}{(p+1)}\frac{p+1}{p-1}\int_0^1\frac{x^p}{(1+x^2)^2}dx$

même méthode que q4.

$\boxed{p\,I_p = \frac{p}{2(p-1)} - \frac{2p}{p-1}\int_0^1 \frac{x^p}{(1+x^2)^2}dx} \xrightarrow[p\to+\infty]{} \frac{1}{2}$ car $\lim_{p\to+\infty}\frac{p}{p-1} = 1$ et $\lim_{p\to+\infty}\int_0^1\frac{x^p}{(1+x^2)^2} = 0$

Exercice 3: Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

(1) $\forall x \in [-1,1]$, $-x \in [-1,1]$

Soit $x \in [-1,1]$, $f_n(-x) = \sin(2n \arcsin(-x)) \overset{\text{arcsin est impaire}}{=} \sin(2n \times (-\arcsin x))$

$= \sin(-(2n \times \arcsin x)) \underset{\text{sin impaire}}{=} -\sin(2n \times \arcsin x) = -f_n(x)$

Donc f_n est impaire

$f_n(0) = \sin(2n \arcsin(0)) \overset{\arcsin(0)=0}{=} \sin(2n \times 0) = \sin(0) = \boxed{0 = f_n(0)}$

$f_n(1) = \sin(2n\arcsin(1)) = \sin(2n \times \frac{\pi}{2}) = \sin(n\pi) = 0$ car $\arcsin(1) = \boxed{\frac{\pi}{2} = f_n(1)}$

(2) Soit $x \in [0,1]$. $f_n(x) = 0$ ssi $\sin(2n \arcsin x) = 0$

ssi $2n \arcsin x \equiv 0\ [\pi]$

ssi $\exists k \in \mathbb{Z}$ tq $2n \arcsin x = k\pi$

ssi $\exists k \in \mathbb{Z}$ tq $\arcsin x = \frac{k\pi}{2n}$

ssi $\exists k \in \mathbb{Z}$ tq $\arcsin x = \frac{k\pi}{2n}$ et $\frac{k\pi}{2n} \in [0, \frac{\pi}{2}]$

ssi $\exists k \in \mathbb{Z}$ tq $\arcsin x = \frac{k\pi}{2n}$ et $0 \leq \frac{k\pi}{2n} \leq \frac{\pi \times n}{2 \times n}$

ssi $\exists k \in \mathbb{Z}$ tq $\arcsin x = \frac{k\pi}{2n}$ et $0 \leq k \leq n$

ssi $\exists k \in [\![0,n]\!]$ tq $\arcsin x = \frac{k\pi}{2n}$

ssi $\exists k \in [\![0,n]\!]$ tq $\sin(\arcsin x) = \sin \frac{k\pi}{2n}$

ssi $\exists k \in [\![0,n]\!]$ tq $x = \sin \frac{k\pi}{2n}$

$\arcsin x \in [0, \frac{\pi}{2}]$
et $\frac{k\pi}{2n} \in [0, \frac{\pi}{2}]$
et sin est injective
sur $[0, \frac{\pi}{2}]$

Donc $\boxed{\mathcal{Y} = \left\{ \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right) \text{ avec } k \in [\![0,n]\!] \right\}}$

(3) arcsin est continue sur $[-1,1]$ et dérivable sur $]-1,1[$
sin est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$
} donc f_n est dérivable sur $]-1,1[$ en tant que composée.

$\forall x \in]-1,1[$, $\boxed{f_n'(x) = \cos(2n \arcsin x) \times \frac{2n}{\sqrt{1-x^2}}}$

(4) Soit $x \in [-1,1[$. $\frac{f_n(x)}{x-1} = \frac{\sin(2n \arcsin x)}{x-1}$

$\sin(2n \arcsin x) = \sin(2n(\arcsin x - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}))$

$= \sin(2n(\arcsin x - \frac{\pi}{2}) + n\pi)$

$= \sin(2n(\arcsin x - \frac{\pi}{2})) \underbrace{\cos(n\pi)}_{(-1)^n} + \cos(2n(\arcsin x - \frac{\pi}{2})) \underbrace{\sin n\pi}_{0}$

$= (-1)^n \sin(2(\arcsin x - \frac{\pi}{2}))$.

$x - 1 = \sin(\arcsin x) - 1 = \sin((\arcsin x - \frac{\pi}{2}) + \frac{\pi}{2}) - 1 = \cos(\arcsin x - \frac{\pi}{2}) - 1$

$\lim\limits_{x \to 1} \frac{f_n(x)}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1} \frac{(-1)^n \sin(2n(\arcsin x - \frac{\pi}{2}))}{\cos(\arcsin x - \frac{\pi}{2}) - 1}$ on pose $u = \arcsin x - \frac{\pi}{2}$

$$\lim_{x\to1^-}\frac{f_n(x)}{x-1}=\lim_{u\to0}\frac{(-1)^n\sin(2nu)}{\cos u-1}=\lim_{u\to0}(-1)^n\,\frac{\sin(2nu)}{2nu}\times\frac{2nu\times u}{\cos u-1}\times\frac{1}{u}$$

or $\lim\limits_{u\to0}\dfrac{\sin(2nu)}{2nu}=1$, $\lim\limits_{u\to0}\dfrac{1-\cos u}{u^2}=\dfrac12$ donc $\lim\limits_{u\to0}\dfrac{u^2}{\cos u-1}=-2$

et $\lim\limits_{u\to0^-}\dfrac1u=-\infty$. Donc $\boxed{\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{f_n(x)}{x-1}=+\infty}$ si n est pair et $\boxed{-\infty}$ si n impair.

Donc f_n n'est pas dérivable à gauche en 1 puisque $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{f_n(x)-f_n(1)}{x-1}=\pm\infty$

Par parité, f n'est pas dérivable à droite en -1.

5. On fait un changement de variables. $\phi:\theta\mapsto\sin\theta$ est $\mathcal{C}^1$ sur $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ et strictement croissante sur $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$

$x=\sin\theta \qquad dx=\cos\theta\,d\theta$

$$I_n=\int_0^1 f_n(x)\,dx=\int_0^1\sin(2n\arcsin x)\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(2n\arcsin(\sin\theta))\cos\theta\,d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(2n\theta)\cos\theta\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(2n\theta+\theta)+\sin(2n\theta-\theta)}{2}\,d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin((2n+1)\theta)+\sin((2n-1)\theta)}{2}\,d\theta=\frac12\left[-\frac{\cos((2n+1)\theta)}{2n+1}-\frac{\cos((2n-1)\theta)}{2n-1}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac12\left[\frac{-\cos(n\pi+\frac{\pi}{2})+\cos(0)}{2n+1}+\frac{-\cos(n\pi-\frac{\pi}{2})+\cos(0)}{2n-1}\right]$$

$$=\frac12\left[\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n-1}\right]=\frac12\,\frac{2n-1+2n+1}{(2n+1)(2n-1)}=\boxed{\frac{2n}{(2n+1)(2n-1)}=I_n}$$

6. Soit $x\in]-1,1[$

$$f_1'(x)=\cos(2\arcsin x)\times\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$f_1'(x)=\left[1-2\sin^2(\arcsin x)\right]\times\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$f_1'(x)=(1-2x^2)\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\boxed{f_1'(x)=(1-\sqrt2 x)(1+\sqrt2 x)\times\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}}$$

x	0		$\frac{\sqrt2}{2}$		1
$f_1'(x)$		$+$	0	$-$	
$f_1(x)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

$f_1\left(\frac{\sqrt2}{2}\right)=\sin\left(2\times1\arcsin\frac{\sqrt2}{2}\right)=\sin\left(2\times\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{\pi}{2}=\boxed{1}$

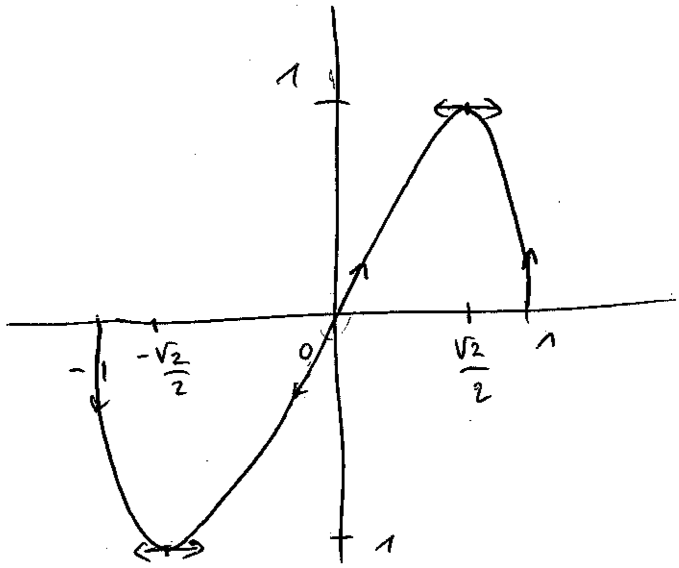
$f_1(0)=f_1(1)=0$ d'après q 1

T: $y=f_1'(0)(x-0)+f_1(0)=2x+0=\boxed{2x=y}$

Soit $x>0$. $f_1(x)-2x=\sin(2\arcsin x)-2x=2\cos(\arcsin x)\sin(\arcsin x)-2x$

$=2\sqrt{1-x^2}\,x-2x=2x(\sqrt{1-x^2}-1)<0$

A droite de 0, $\mathcal{C}_1$ est en dessous de T. Comme f est impaire, à gauche de 0, $\mathcal{C}_1$ est au dessus de T.


1
1
-1
$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
0
$\frac{\sqrt{2}}{2}$
1