

Les documents, calculatrices et téléphones portables sont interdits. La clarté et la précision de la rédaction seront prises en compte dans la notation. Les trois exercices sont indépendants.

Exercice 1

- (a) En faisant un intégration par parties, déterminer une primitive de $x \mapsto \arctan(x)$ sur $\mathbb{R}$.
 (b) Résoudre l'équation différentielle du premier ordre $y'(x) + \frac{1}{x}y(x) = \frac{\arctan(x)}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
- On considère le système d'inconnues réelles x, y, z et de paramètre réel a :

$$S = \begin{cases} x + y - z = 1 \\ x + 2y + az = 2 \\ 2x + ay + 2z = 3 \end{cases}.$$
 - Résoudre ce système lorsque $a = -2$.
 - Résoudre ce système lorsque $a = 3$.
 - Résoudre ce système lorsque $a \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 3\}$.
 - Interpréter géométriquement les ensembles de solutions obtenus aux trois questions précédentes. Réponse précise attendue.

Exercice 2

Dans cet exercice, on considère, pour tout $p \geq 0$, les intégrales $I_p = \int_0^1 \frac{x^p}{1+x^2} dx$.

- Calculer I_0 et I_1 .
- Calculer $I_p + I_{p+2}$ en fonction de p . En déduire I_2 et I_3 .
- On considère la suite (u_n) définie pour $n \geq 1$ par $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k}$.

Soit $q \in \mathbb{N}^*$. Calculer de deux manières $\sum_{k=1}^q (-1)^{k+1} (I_{2k-1} + I_{2k+1})$.

En déduire que $u_q + 2(-1)^q I_{2q+1} = \ln(2)$.

- Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{2(p+1)} \leq I_p \leq \frac{1}{p+1}$. En déduire $\lim_{p \rightarrow +\infty} I_p$.
- On admet que la suite (u_n) est convergente. Préciser la limite de la suite (u_n) .
- Au moyen d'une intégration par parties, déterminer $\lim_{p \rightarrow +\infty} pI_p$.

Exercice 3

Pour tout entier naturel non nul n fixé, on considère la fonction f_n de la variable réelle x définie sur $[-1, 1]$ par :

$$f_n(x) = \sin(2n \arcsin(x))$$

- Etudier la parité de f_n . Calculer $f_n(0)$ et $f_n(1)$.
- Résoudre l'équation $f_n(x) = 0$ d'inconnue x appartenant à $[0, 1]$.
- Démontrer que f_n est continue sur $[-1, 1]$ et dérivable sur $] -1, 1[$. Calculer $f'_n(x)$ pour tout x appartenant à l'ensemble $] -1, 1[$.
- Etudier la limite de $\frac{f_n(x)}{x-1}$ quand x tend vers 1 par valeurs inférieures. f_n est-elle dérivable à gauche en 1 ? à droite en -1 ?
- Calculer $I_n = \int_0^1 f_n(x) dx$. On pourra faire le changement de variables $\sin \theta = x$.
- Donner le tableau de variations de f_1 . Préciser une équation de la tangente T à la courbe représentative $\mathcal{C}_1$ de f_1 au point d'abscisse 0 et préciser la position de T et $\mathcal{C}_1$. Tracer $\mathcal{C}_1$.