

Ex 4 TD 10

① $\mathcal{Y}^+ = \{ \varphi: \mathbb{R}_+^x \rightarrow \mathbb{R} \mid t \mapsto \lambda t + \frac{t^3}{2}, \lambda \in \mathbb{R} \}$

$\mathcal{Y}^- = \{ \varphi: \mathbb{R}_-^x \rightarrow \mathbb{R} \mid t \mapsto \mu t + \frac{t^3}{2}, \mu \in \mathbb{R} \}$

Par analyse - synthèse

analyse: Si f est sol sur $\mathbb{R}$ alors $\exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tq $\begin{cases} \text{si } x > 0 & f(x) = \lambda t + \frac{t^3}{2} \\ \text{si } x < 0 & f(x) = \mu t + \frac{t^3}{2} \end{cases}$
 AT $\left. \begin{array}{l} f \text{ cont en } 0 \\ f \text{ est der en } 0 \end{array} \right\}$

or $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0$ donc on pose $f(0) = 0$.

et $f'_g(0) = \mu$ et $f'_d(0) = \lambda$ donc $\lambda = \mu$.

synthèse: Vérifions si $f: t \mapsto \lambda t + \frac{t^3}{2}$ est sol de (E) $\rightarrow$ oui
 Concl

② sur $\mathbb{R}_-^x$: $-xy' + y = 1$ $\mathcal{Y} = \{ \varphi: \mathbb{R}_-^x \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \mu x + 1, \mu \in \mathbb{R} \}$

sur $\mathbb{R}_+^x$: $xy' + y = 1$ $\mathcal{Y}^+ = \{ \varphi: \mathbb{R}_+^x \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{x} + 1, \lambda \in \mathbb{R} \}$

Par analyse - synthèse

analyse Si f est sol sur $\mathbb{R}$ alors $\exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tq $\begin{cases} \text{si } x > 0 & f(x) = \frac{1}{x} + 1 \\ \text{si } x < 0 & f(x) = \mu x + 1 \end{cases}$
 $\left. \begin{array}{l} f \text{ est cont en } 0 \\ f \text{ est der en } 0 \end{array} \right\}$

or si $\lambda \neq 0$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \pm \infty$ donc $\lambda = 0$ pour avoir une limite finie en 0^+ .

on pose donc $f(0) = 1 = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ dans le cas où $\lambda = 0$

$f'_g(0) = \mu$ et $f'_d(0) = 0$ donc $\mu = 0$

synthèse
 Concl

Vérifions si $f: t \mapsto 1$ est sol de (E) $\rightarrow$ oui

Ex 9

$$(1+e^x)y'' + y' - e^x y = 0$$

Soit $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction 2 fois dérivable sur $\mathbb{R}$

y sol de (E) ssi $(1+e^x)y''(x) + y'(x) - e^x y(x) = 0$

Comme y est 2 fois dérivable, z est 1 fois dérivable sur $\mathbb{R}$

$$\text{et } \forall x \in \mathbb{R} \quad z'(x) = y'(x) + y''(x)$$

$$\text{ssi } \forall x \in \mathbb{R} \quad (1+e^x)z'(x) = (1+e^x)(y'(x) + y''(x))$$

Ainsi y sol de (E) ssi $\forall x \in \mathbb{R} \quad (1+e^x)z'(x) - (1+e^x)y'(x) + y'(x) - e^x y(x) = 0$

$$\text{ssi } \forall x \in \mathbb{R} \quad (1+e^x)z'(x) - e^x(y'(x) + y(x)) = 0$$

$$\text{ssi } \forall x \in \mathbb{R} \quad (1+e^x)z'(x) - e^x z(x) = 0$$

$$\text{ssi } \forall x \in \mathbb{R} \quad z'(x) - \frac{e^x}{1+e^x} z(x) = 0$$

$$\text{ssi } \exists \lambda \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad z(x) = \lambda e^{-\int \frac{e^x}{1+e^x} dx}$$

$$\text{ssi } \exists \lambda \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad z(x) = \lambda(1+e^x)$$

$$\text{ssi } \exists \lambda \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad y'(x) + y(x) = \lambda(1+e^x)$$

$$\text{ssi } \exists \lambda \in \mathbb{R} \quad \exists K \in \mathbb{R} \quad y(x) = K e^{-x} + \frac{\lambda(1+e^x)^2}{2} e^{-x}$$

En effet, résolvons l'éq (E'): $y' + y = \lambda(1+e^x)$

$$\mathcal{S}_h = \{x \mapsto K e^{-x}, K \in \mathbb{R}\}$$

On cherche une solution particulière de la forme

$$y_p: x \mapsto \kappa(x) e^{-x} \text{ où } \kappa \text{ est une fonction dérivable sur } \mathbb{R}$$

$$y_p \text{ est sol de (E')} \text{ ssi } y_p \text{ est dérivable sur } \mathbb{R} \text{ et } \forall x \in \mathbb{R} \quad y_p'(x) + y_p(x) = \lambda(1+e^x)$$

$$\text{ssi } \forall x \in \mathbb{R} \quad \kappa'(x) e^{-x} - \kappa(x) e^{-x} + \kappa(x) e^{-x} = \lambda(1+e^x)$$

$$\text{ssi } \forall x \in \mathbb{R} \quad \kappa'(x) = \lambda(1+e^x) e^x \text{ (forme } \lambda u u') \text{ car } y_p \text{ est dérivable sur } \mathbb{R} \text{ entraînant que } \kappa \text{ l'est aussi}$$

$$\text{on propose } y_p: x \mapsto \frac{\lambda(1+e^x)^2}{2} e^{-x}$$

$$\mathcal{S}_{E'} = \left\{ x \mapsto K e^{-x} + \frac{\lambda}{2} (1+e^x)^2 e^{-x} \right\}$$