

## Suites implicites

**Exercice 1. (★★)**

On définit sur  $\mathbb{R}^{++}$  la fonction  $f$  par :  $f(x) = x + \ln(x)$ .

- Dresser le tableau de variations de  $f$ .
- Montrer que l'équation  $f(x) = n$  a une unique solution dans  $\mathbb{R}^{++}$ .  
On la note  $u_n$ .
- Montrer que la suite  $(u_n)$  est croissante.

**Exercice 2. (★★)**

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}^+$  par  $f(x) = x \ln(x) - 1$  si  $x > 0$  et  $f(0) = -1$ .

- Montrer que  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}^+$ .
- Calculer la limite de  $f$  en  $+\infty$ .
- Justifier que  $f$  est dérivable sur  $]0, +\infty[$  puis calculer  $f'(x)$ .
- Établir le tableau de variations de  $f$  sur  $\mathbb{R}^+$ .
- Soit  $n \in \mathbb{N}$ .  
Montrer que l'équation  $f(x) = n$  possède une unique solution dans  $\mathbb{R}^+$ .  
On note  $u_n$  cette solution. Justifier que  $u_n > 1$ .
- On note  $g$  la restriction de  $f$  à l'intervalle  $[1, +\infty[$ .

- Justifier que  $g$  est une bijection de  $[1, +\infty[$  dans un intervalle  $J$  à préciser.
- Donner le tableau de variations complet de la réciproque  $g^{-1}$  sur  $J$ .
- Exprimez  $u_n$  à l'aide de  $g^{-1}$ .  
En déduire la monotonie de la suite  $(u_n)$  et sa limite lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .

**Exercice 3. (★★)**

On considère les fonctions  $f_n : x \mapsto x^n + x - 1$  pour  $n \in \mathbb{N}^*$ .

- Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Démontrer que l'équation  $f_n(x) = 0$  admet une unique solution  $x_n \in ]0, 1[$ .
- Démontrer que, pour tout  $n > 0 : f_{n+1}(x_n) < f_{n+1}(x_{n+1})$ .  
En déduire que :  $\forall n > 0, x_n < x_{n+1}$ .
- Démontrer que  $(x_n)$  converge et que sa limite  $\ell$  est telle que  $0 < \ell \leq 1$ .
- Démontrer que :  $\forall n > 0, x_n \leq \ell$ .
- En procédant par l'absurde, montrer que  $\ell = 1$ .

**Exercice 4 (★★)(d'après EDHEC 2008)**

Pour tout entier naturel  $n$  non nul, on considère  $f_n : x \mapsto \frac{1}{1+e^x} + nx$ . On appelle  $(\mathcal{C}_n)$  sa courbe représentative dans un repère orthogonal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

- Déterminer, pour tout réel  $x$ ,  $f'_n(x)$  et  $f''_n(x)$ .
  - En déduire que la fonction  $f_n$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ .
- Calculer  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x)$  ainsi que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)$ .
  - Déterminer les coordonnées du seul point d'inflexion, noté  $A_n$ , de  $(\mathcal{C}_n)$ .
  - Donner l'équation de la tangente  $(T_1)$  à la courbe  $(\mathcal{C}_1)$  en  $A_1$  puis tracer la droite  $(T_1)$  ainsi que l'allure de la courbe  $(\mathcal{C}_1)$ .
- Montrer que l'équation  $f_n(x) = 0$  possède une seule solution sur  $\mathbb{R}$ , notée  $u_n$ .
  - Montrer que l'on a :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, -\frac{1}{n} < u_n < 0$ .
  - En déduire la limite de la suite  $(u_n)$ .
  - En revenant à la définition de  $u_n$ , montrer que  $u_n \sim -\frac{1}{2n}$ .
  - En déduire la limite de  $nu_n$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .