

Suites implicites

Exercice 1. (★★)

On définit sur $\mathbb{R}^{+*}$ la fonction f par : $f(x) = x + \ln(x)$.

a. Dresser le tableau de variations de f .

Démonstration.

- La quantité $\ln(x)$ est définie pour $x > 0$.
Ainsi, $\mathcal{D}_f =]0, +\infty[$.
- De plus, $\ln$ est dérivable sur $]0, +\infty[$.
Ainsi, f est dérivable sur cet ensemble. Pour tout $x \in]0, +\infty[$:

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{x} > 0$$

On obtient donc le tableau de variations suivant.

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		+
f	$-\infty$	$+\infty$

- b. Montrer que l'équation $f(x) = n$ a une unique solution dans $\mathbb{R}^{+*}$.
On la note u_n .

Démonstration.

- La fonction f est :
 - × continue sur $]0, +\infty[$,
 - × strictement croissante sur $]0, +\infty[$.
- Elle réalise donc une bijection de $]0, +\infty[$ sur :

$$f(]0, +\infty[) =]\lim_{x \rightarrow 0} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)[=]-\infty, +\infty[$$

- Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme $n \in]-\infty, +\infty[$, n admet un unique antécédent $x \in]0, +\infty[$ par la fonction f . On note alors $u_n (\in]0, +\infty[)$ cet antécédent.
(on a donc $f(u_n) = n$)

□

- c. Montrer que la suite (u_n) est croissante.

Démonstration.

- Soit $n \in \mathbb{N}$. Par définition, on a $f(u_n) = n$ et $f(u_{n+1}) = n + 1$.
On en déduit que : $n = f(u_n) < f(u_{n+1}) = n + 1$.
- Or, d'après le théorème de la bijection, la fonction :

$$f^{-1} :]-\infty, +\infty[\mapsto]0, +\infty[$$

est strictement croissante.

- En appliquant f^{-1} de part et d'autre de l'inégalité, on obtient :

$$f^{-1}(f(u_n)) = u_n < u_{n+1} = f^{-1}(f(u_{n+1}))$$

□

La suite (u_n) est donc strictement croissante.

□

Exercice 2. (★★)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = x \ln(x) - 1$ si $x > 0$ et $f(0) = -1$.

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^+$.

Démonstration.

- La fonction f est continue sur $]0, +\infty[$ car elle est la somme de :
 $\times x \mapsto x \ln(x)$ continue sur $]0, +\infty[$ comme produit des fonctions :
 (i) $x \mapsto x$ polynomiale donc continue sur $]0, +\infty[$,
 (ii) $x \mapsto \ln(x)$ continue sur $]0, +\infty[$.
 $\times x \mapsto -1$ constante donc continue sur $]0, +\infty[$.
- D'autre part, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) - 1 = 0 - 1 = -1 = f(0)$.
 On en déduit que f est continue en 0.

Ainsi, f est continue sur $\mathbb{R}^+$.

2. Calculer la limite de f en $+\infty$.

Démonstration.

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$, on a
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

3. Justifier que f est dérivable sur $]0, +\infty[$ puis calculer $f'(x)$.

Démonstration.

- La fonction f est dérivable sur $]0, +\infty[$ car elle est la somme de :
 $\times x \mapsto x \ln(x)$ dérivable sur $]0, +\infty[$ comme produit des fonctions :
 (i) $x \mapsto x$ polynomiale donc dérivable sur $]0, +\infty[$,
 (ii) $x \mapsto \ln(x)$ dérivable sur $]0, +\infty[$.
 $\times x \mapsto -1$ constante donc dérivable sur $]0, +\infty[$.

Ainsi, f est dérivable sur $]0, +\infty[$.

(on pouvait montrer dès la question 1. que f est C^∞ sur $]0, +\infty[$)

(☆): application directe du cours, (★): pas de difficulté majeure, (★★): plus difficile, (★★★): costaud

- Soit $x \in]0, +\infty[$. On a alors : $f'(x) = \ln(x) + x \times \frac{1}{x} = \ln(x) + 1$.

$$\forall x > 0, f'(x) = \ln(x) + 1$$

4. Établir le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}^+$.

Démonstration.

Soit $x > 0$. On a :

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \ln(x) + 1 > 0 \Leftrightarrow \ln(x) > -1 \Leftrightarrow x > e^{-1}$$

On en déduit le tableau de variations suivant.

x	0	e^{-1}	$+\infty$
Signe de $f'(x)$		-	+
Variations de f	-1	$-1 - e^{-1}$	$+\infty$

$$\text{Avec } f(e^{-1}) = e^{-1} \ln(e^{-1}) - 1 = -e^{-1} - 1$$

5. Soit $n \in \mathbb{N}$.

Montrer que l'équation $f(x) = n$ possède une unique solution dans $\mathbb{R}^+$.
 On note u_n cette solution. Justifier que $u_n > 1$.

Démonstration.

- La fonction $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ est :
 $\times$ continue sur $[e^{-1}, +\infty[$,
 $\times$ strictement croissante sur $[e^{-1}, +\infty[$.
 Elle réalise donc une bijection de $[e^{-1}, +\infty[$ sur $f([e^{-1}, +\infty[)$ avec :

$$f([e^{-1}, +\infty[) = [f(e^{-1}), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)[= [-1 - e^{-1}, +\infty[$$

- Comme $n \geq 0$, $n \in [-1 - e^{-1}, +\infty[$.

Ainsi, l'équation $f(x) = n$ possède une unique solution dans $[e^{-1}, +\infty[$.

- Enfin, $f(1) = 1 \times \ln(1) - 1 = -1$ donc $f(u_n) = n > -1 = f(1)$.
On applique alors, de part et d'autre de cette inégalité, la fonction f^{-1} strictement croissante.

On obtient ainsi : $u_n > 1$.

□

6. On note g la restriction de f à l'intervalle $[1, +\infty[$ dans un intervalle J à préciser.

- a) Justifier que g est une bijection de $[1, +\infty[$ dans un intervalle J à préciser.

Démonstration.

- La fonction $g : [1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ est injective car restriction de f qui est elle-même injective.
- D'autre part, $g : [1, +\infty[\rightarrow J$ est surjective si l'on choisit $J = \text{Im}(g) = g([1, +\infty[)$. Or :

$$g([1, +\infty[) = [f(1), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)[= [-1, +\infty[$$

g réalise une bijection de $[1, +\infty[$ sur $[-1, +\infty[$.

(ou par application du théorème de la bijection)

□

- b) Donner le tableau de variation complet de la réciproque g^{-1} sur J .

Démonstration.

D'après le théorème de la bijection, la fonction g^{-1} est **continue** sur $[-1, +\infty[$ et de même monotonie que g .

Or $[1, +\infty[\subset]e^{-1}, +\infty[$, et f est strictement croissante sur $[e^{-1}, +\infty[$.

On en déduit donc le tableau de variations suivant.

x	-1	$+\infty$
Variations de g^{-1}	1	$+\infty$

□

- c) Exprimez u_n à l'aide de g^{-1} .

En déduire la monotonie de la suite (u_n) et sa limite lorsque n tend vers $+\infty$.

Démonstration.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

- Par définition, on a : $f(u_n) = n$.
De plus, comme $u_n > 1$, on a $f(u_n) = g(u_n)$.

On en déduit que $g(u_n) = n$ et donc que $u_n = g^{-1}(n)$.

- Comme g^{-1} est strictement croissante et $n < n+1$, on obtient :

$$u_n = g^{-1}(n) < g^{-1}(n+1) = u_{n+1}$$

La suite (u_n) est donc (strictement) croissante.

- Pour ce dernier point, on pouvait raisonner de deux manières différentes.

La manière adaptée à l'énoncé, à privilégier ici
D'après le théorème de composition des limites :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} g^{-1}(n) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g^{-1}(x) = +\infty$$

Ou alors à l'aide du théorème de convergence monotone (peu adapté à l'énoncé mais raisonnablement classique qu'il est important de comprendre)

Rappelons que, par définition de la suite (u_n) , on a $f(u_n) = n$. Comme $u_n > 1 > 0$, cela s'écrit :

$$u_n \ln(u_n) - 1 = n \quad \text{ou encore} \quad u_n \ln(u_n) = n + 1$$

Deux cas se présentent alors.

1) Soit (u_n) est majorée

Étant croissante, elle est convergente vers une limite finie $\ell \in \mathbb{R}$.

En passant à la limite dans l'égalité précédente, on obtient alors : $\ell \ln(\ell) = +\infty$.

Ceci étant impossible, ce cas est à écarter.

2) Soit (u_n) n'est pas majorée

Étant croissante, elle tend vers $+\infty$.

On en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

□

Exercice 3. (★★)

On considère les fonctions $f_n : x \mapsto x^n + x - 1$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution $x_n \in]0, 1[$.

Démonstration.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

• La fonction f_n est une fonction polynomiale.

Elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a : $f'_n(x) = n x^{n-1} + 1$.

Si $x > 0$, $n x^{n-1} + 1 > 0$. On en déduit le tableau de variations suivant.

(☆): application directe du cours, (★): pas de difficulté majeure, (★★): plus difficile, (★★★): costaud

x	0	1	
Signe de $f'(x)$	0	+	0
f			1

• La fonction f_n est :

× continue sur $]0, 1[$,

× strictement croissante sur $]0, 1[$.

Elle réalise donc une bijection de $]0, 1[$ sur $f(]0, 1[) =]-1, 1[$.

Comme $0 \in]-1, 1[$, l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution $x_n \in]0, 1[$.

Remarque

• On peut aussi rédiger comme suit.

Comme $0 \in]-1, 1[$, 0 admet un unique antécédent $x_n \in]0, 1[$ par la fonction f_n .

• Quelle que soit la rédaction, il faut comprendre que l'on vient de définir une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

(à chaque valeur de n correspond une unique x_n)

• Cette suite est définie de manière **implicite** (non explicite).

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, x_n est l'unique élément tel que :

× $x_n \in]0, 1[$,

× $f_n(x_n) = 0$ i.e. $x_n^n + x_n + 1 = 0$ (déterminant pour la suite) □

b. Démontrer que, pour tout $n > 0$: $f_{n+1}(x_n) < f_{n+1}(x_{n+1})$.

En déduire que : $\forall n > 0$, $x_n < x_{n+1}$.

Démonstration.

D'après la question précédente : $\forall m \in \mathbb{N}^*$, $f_m(x_m) = 0$.

(pour bien comprendre qu'on peut écrire cette égalité en $m = n$ mais aussi en $m = n + 1$)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- Par définition de la fonction f_{n+1} , on a : $f_{n+1}(x_n) = x_n^{n+1} + x_n - 1$.
Or, d'après la question précédente, on a : $f_n(x_n) = 0$.
Or $f_n(x_n) = x_n^n + x_n - 1 = 0$. Ainsi, on a : $x_n^n = 1 - x_n$.
On en conclut que :

$$\begin{aligned}
 f_{n+1}(x_n) &= x_n^{n+1} + x_n - 1 \\
 &= x_n \times x_n^n + x_n - 1 \\
 &= x_n \times (1 - x_n) + x_n - 1 \\
 &= -x_n^2 + 2x_n - 1 \\
 &= -(x_n^2 - 2x_n + 1) = -(x_n - 1)^2 < 0 \quad \text{car } x_n < 1
 \end{aligned}$$

- Par la question précédente, $f_{n+1}(x_{n+1}) = 0$.

On a donc bien : $f_{n+1}(x_n) < 0 = f_{n+1}(x_{n+1})$.

- D'après le théorème de la bijection, la fonction $f_{n+1}^{-1} :]-1, 1[\rightarrow]0, 1[$ est de même monotonie que f_{n+1} , à savoir strictement croissante.
On en déduit que :

$$x_n = f_{n+1}^{-1}(f_{n+1}(x_n)) < f_{n+1}^{-1}(f_{n+1}(x_{n+1})) = x_{n+1} \quad \square$$

- e. Démontrer que (x_n) converge et que sa limite ℓ est telle que $0 < \ell \leq 1$.

Démonstration.

- La suite (x_n) est croissante et majorée par 1.
Elle converge donc vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$.
- Par passage à la limite dans l'inégalité : $0 < x_n < 1$, on en déduit que ℓ est telle que : $0 \leq \ell \leq 1$.
- La suite (x_n) étant croissante, on en déduit que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, x_n \geq x_1$.
Et donc, par passage à la limite, on a : $\ell \geq x_1$.
- Par définition, x_1 est l'unique élément de $]0, 1[$ qui vérifie :
 $f_1(x_1) = x_1 + x_1 - 1 = 0$ i.e. $2x_1 = 1$ et donc $x_1 = \frac{1}{2}$.

On en conclut que : $0 < \frac{1}{2} \leq \ell \leq 1$. $\square$

- d. Démontrer que : $\forall n > 0, x_n \leq \ell$.

Démonstration.

- *Attention : démonstration hors programme !*

Le théorème de convergence monotone stipule que $\ell = \sup_{n \in \mathbb{N}^*} x_n$.

Ainsi, on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*, x_n \leq \sup_{n \in \mathbb{N}^*} x_n = \ell$.

- *Démonstration attendue.*

Supposons par l'absurde qu'il existe un rang $n_0 > 0$ tel que : $x_{n_0} > \ell$.

La suite (x_n) étant croissante, on a : $\forall n \geq n_0, x_n \geq x_{n_0}$.

Par passage à la limite, on en déduit que : $\ell \geq x_{n_0}$.

Et donc que : $\ell \geq x_{n_0} > \ell$, ce qui est impossible ! $\square$

- e. En procédant par l'absurde, montrer que $\ell = 1$.

Démonstration.

Supposons par l'absurde que $\ell \neq 1$.

D'après les questions précédentes, on a :

- $0 < \ell < 1$,
- $0 < x_n \leq \ell$ et donc, par croissance de la fonction élévation à la puissance n sur $]0, +\infty[$, on en déduit que : $0 \leq x_n^n \leq \ell^n$. Or :

$$\begin{aligned}
 &\times \ell^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \quad \text{car } 0 < \ell < 1, \\
 &\times 0 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.
 \end{aligned}$$

Ainsi, par le théorème d'encadrement, on a : $x_n^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Or : $x_n^n = 1 - x_n$. Par passage à la limite dans cette égalité, on en déduit que : $0 = 1 - \ell$ et ainsi que $\ell = 1$.

Ceci contredit l'hypothèse $\ell \neq 1$. $\square$

Exercice 4 (★★)(d'après EDHEC 2008)

Pour tout entier naturel n non nul, on considère $f_n : x \mapsto \frac{1}{1+e^x} + nx$. On appelle $(\mathcal{C}_n)$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) **a.** Déterminer, pour tout réel x , $f'_n(x)$ et $f''_n(x)$.

Démonstration.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction f_n est définie sur $\mathbb{R}$ car $1+e^x \neq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ ($\forall x \in \mathbb{R}, 1+e^x > 1 > 0$).
- f est C^∞ sur $\mathbb{R}$, car somme de :
 - $\times x \mapsto \frac{1}{1+e^x}$ C^∞ sur $\mathbb{R}$ comme inverse de la fonction $x \mapsto 1+e^x$ qui est elle-même C^∞ sur $\mathbb{R}$ et qui ne s'annule pas sur cet intervalle.
 - $\times x \mapsto nx$ C^∞ sur $\mathbb{R}$ car polynomiale.

$$f'_n(x) = -(1+e^x)^{-2} \times e^x + n$$

$$f''_n(x) = (2(1+e^x)^{-3} \times e^x - (1+e^x)^{-2}) e^x$$

□

b. En déduire que la fonction f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Démonstration.

Afin de déterminer le signe de f'_n , on dresse son tableau de variations. Pour ce faire, on doit au préalable déterminer le signe de sa dérivée, f''_n .

$$\begin{aligned} f''_n(x) &\geq 0 \\ \Leftrightarrow 2(1+e^x)^{-3} \times e^x - (1+e^x)^{-2} &\geq 0 \\ \Leftrightarrow 2(1+e^x)^{-3} \times e^x &\geq (1+e^x)^{-2} \\ \Leftrightarrow 2e^x &\geq (1+e^x) \\ \Leftrightarrow e^x &\geq 1 \\ \Leftrightarrow x &\geq 0 \end{aligned}$$

D'où le tableau de variations suivant.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''_n(x)$		$-$	$+$
f'_n	n	$-\frac{1}{4}+n$	n
$f_n(x)$		$+$	

La fonction f'_n admet un minimum en 0 valant $-\frac{1}{4}+n > 0$ (car $n \geq 1$).

On en déduit que $f'_n > 0$ et donc que f_n est strictement croissante.

Comme $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$, on a $\lim_{x \rightarrow -\infty} f'_n(x) = n$.

Or : $\frac{e^x}{(1+e^x)^2} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^x}{(e^x)^2} = e^{-x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$. En effet :

$$\frac{e^x}{(1+e^x)^2} = \frac{e^x}{e^{2x} + 1} = e^{-x} \frac{1}{\frac{1}{e^{2x}} + 1}$$

(on fait apparaître le terme dominant mais on peut aussi former le quotient ...)

et $\frac{1}{e^{2x}} + 1 \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0 + 0 + 1 = 1$

Donc $f'_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} -0 \times 1 + n = n$. □

2) **a.** Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x)$ ainsi que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)$.

Démonstration.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = +\infty$$

□

- b.** Déterminer les coordonnées du seul point d'inflexion, noté A_n , de $(\mathcal{C}_n)$.

Démonstration.

D'après le tableau de variations précédent, f_n'' s'annule en changeant de signe seulement au point d'abscisse 0. De plus, $f_n(0) = \frac{1}{2}$.

$$A_n = (0, \frac{1}{2}) \text{ est le seul point d'inflexion de } (\mathcal{C}_n).$$

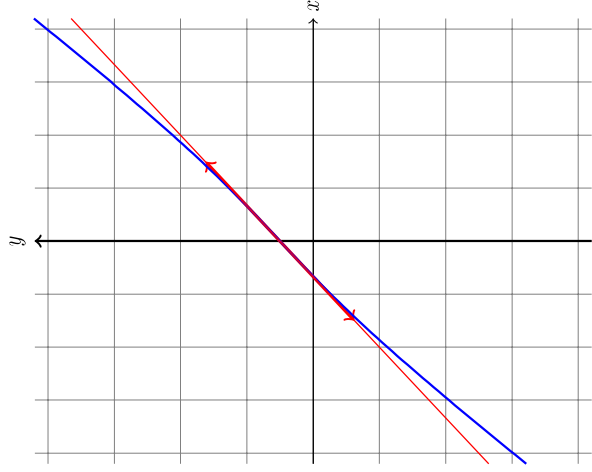
□

- c.** Donner l'équation de la tangente (T_1) à la courbe $(\mathcal{C}_1)$ en A_1 puis tracer la droite (T_1) ainsi que l'allure de la courbe $(\mathcal{C}_1)$.

Démonstration.

La tangente de $(\mathcal{C}_1)$ en A_1 a pour équation : $y = f_n(0) + f_n'(0)(x-0)$.
Or $f_n'(0) = n - \frac{1}{4}$. D'où $f_1'(0) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

$$(T_1) \text{ a pour équation } y = \frac{1}{2} + \frac{3}{4}x.$$



□

- 3) a.** Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ possède une seule solution sur $\mathbb{R}$, notée u_n .

Démonstration.

La fonction f_n est

× continue sur $] -\infty, +\infty[$,

× strictement croissante sur $] -\infty, +\infty[$.

Elle réalise donc une bijection de $] -\infty, +\infty[$ sur :

$$f_n(] -\infty, +\infty[) =] \lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)[=] -\infty, +\infty[$$

Comme $0 \in] -\infty, +\infty[$ l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution $u_n \in] -\infty, +\infty[$.

□

- b.** Montrer que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*, -\frac{1}{n} < u_n < 0$.

Démonstration.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\bullet f_n(-\frac{1}{n}) = \frac{1}{1 + e^{-\frac{1}{n}}} - 1 = \frac{-e^{-\frac{1}{n}}}{1 + e^{-\frac{1}{n}}} < 0,$$

$$\bullet f_n(u_n) = 0,$$

$$\bullet f_n(0) = \frac{1}{2} > 0.$$

Ainsi : $f_n(-\frac{1}{n}) < f_n(u_n) < f_n(0)$.

Par le théorème de la bijection, f_n^{-1} est de même monotonie que f_n .

Par application de f_n^{-1} , strictement croissante, à l'inégalité précédente, on en déduit : $-\frac{1}{n} < u_n < 0$.

□

- c.** En déduire la limite de la suite (u_n) .

Démonstration.

Comme, $\frac{-1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et $0 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, par le théorème d'encadrement, on a : $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

□

- d. En revenant à la définition de u_n , montrer que $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{2n}$.

Démonstration.

Par définition, u_n est l'unique solution de l'équation $f_n(x) = 0$.

On en déduit que : $\frac{1}{1+e^{u_n}} + n u_n = 0$ et donc que : $n u_n = -\frac{1}{1+e^{u_n}}$.

Ainsi :

$$\frac{u_n}{-\frac{1}{2n}} = -2 n u_n = 2 \frac{1}{1+e^{u_n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 2 \frac{1}{1+e^0} = \frac{2}{2} = 1$$

$$\boxed{u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{2n}}.$$

- e. En déduire la limite de $n u_n$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Démonstration.

D'après la question précédente :

$$n u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{\cancel{n}}{2\cancel{n}} = -\frac{1}{2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\frac{1}{2}$$

$$\boxed{n u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\frac{1}{2}}$$

Exercice 5. (★★)

On définit pour tout $n \in \mathbb{N}$ la fonction f_n par : $f_n(x) = x^5 + n \times x - 1$.

- a. Faire l'étude de la fonction f_n .

Démonstration.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

- La fonction f_n est polynomiale. Elle est donc C^∞ sur $\mathbb{R}$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$f'(x) = 5x^4 + n > 0 \text{ si } n \geq 1$$

On obtient donc le tableau de variations suivant.

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'_n(x)$		+
f	$-\infty$	$+\infty$

(en toute rigueur, il faudrait ajouter que f' s'annule en 0 si $n = 0$ mais cela ne change pas l'allure du tableau de variations) $\square$

- $\square$ b. Montrer que pour tout $n \geq 1$, il existe une unique solution à l'équation $f_n(x) = 0$. On la notera u_n .

Démonstration.

- La fonction f_n est :
 - $\times$ continue sur $] -\infty, +\infty[$,
 - $\times$ strictement croissante sur $] -\infty, +\infty[$.
- Elle réalise donc une bijection de $] -\infty, +\infty[$ sur :

$$f(]-\infty, +\infty[) =] \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)[=] -\infty, +\infty[$$

- Comme $0 \in] -\infty, +\infty[$, l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution $u_n \in] -\infty, +\infty[$.
(on a donc $f_n(u_n) = 0$) $\square$
- c. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq \frac{1}{n}$.

Démonstration.

- Soit $n \in \mathbb{N}$. On a : $f_n(0) = -1 < 0 < \frac{1}{n^5} = f_n\left(\frac{1}{n}\right)$.
- Or, d'après le théorème de la bijection, la fonction $f_n^{-1} :] -\infty, +\infty[\mapsto] -\infty, +\infty[$ est strictement croissante.