Exercice 3 : Facultatif Dans la question 4b on pourra utiliser la définition suivante : soient f et g deux fonctions définies au voisinage de $+\infty$ telles que g ne s'annule pas au voisinage de $+\infty$. On dit que f et g sont équivalentes au voisinage de $+\infty$ et on écrit $f(x) \sim g(x)$ lorsque $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$.

PARTIE A

On considère l'équation différentielle : $y' + 2xy = 1$.

1. De quel type d'équation différentielle s'agit-il ?

   On désigne désormais par f l'une de ses solutions sur $\mathbb{R}$, **que l'on ne cherchera pas à exprimer pour l'instant.**

2. a) Prouver que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

   b) Quelle est la valeur de $f'(0)$?

PARTIE B

On considère la fonction de la variable réelle $D : x \mapsto D(x) = e^{-x^2} \int_0^x e^{t^2} dt$.

1. Justifier le fait que D est une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, et vérifier que D est une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle : $y' + 2xy = 1$.

2. Etudier la parité de D.

3. Prouver que : $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ xe^{-x^2} \leq D(x) \leq x$.

4. a) Prouver que : $\forall x \in \mathbb{R}^{+*},\ \int_1^x e^{t^2} dt = \dfrac{e^{x^2}}{2x} + \dfrac{e^{x^2}}{4x^3} - \dfrac{3e}{4} + \dfrac{3}{4} \int_1^x \dfrac{e^{t^2}}{t^4} dt$.

   b) Soit la fonction $h : t \mapsto \dfrac{e^{t^2}}{t^2}$. Montrer que h est croissante sur $[1, +\infty[$. En déduire que :

   $$\forall x \in [1, +\infty[,\ \int_1^x \frac{e^{t^2}}{t^4} dt \leq h(x) \int_1^x \frac{1}{t^2} dt,$$

   et qu'au voisinage de $+\infty$: $\int_1^x e^{t^2} dt \sim \dfrac{e^{x^2}}{2x}$.

   En déduire enfin un équivalent de $D(x)$ au voisinage de $+\infty$.

5. a) Prouver que D admet un maximum, atteint en un point b de $\mathbb{R}^{+*}$.

   b) Montrer que ce maximum est égal à $\dfrac{1}{2b}$.

   c) En déduire l'unicité du point où le maximum est atteint.

à ne faire qu'une fois que toutes les autres questions ont été traitées.

PARTIE C

1. Déterminer à l'aide de D l'ensemble des fonctions solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle : $y' + 2xy = 1$.

2. Montrer l'existence d'une unique solution impaire.

DM5 MPSI Pour le 11/12/24

Ex 1 :

Dans cet exercice, on s'intéresse à l'équation $\frac{\ln(x)^2}{x} - \frac{1}{n} = 0$ (E_n) où n est un entier naturel non nul et x, l'inconnue, est un nombre réel supérieur ou égal à 1.

On considère la fonction f_n définie sur $[1,+\infty[$ par :

$$\forall x \in [1,+\infty[, \quad f_n(x) = \frac{\ln(x)^2}{x} - \frac{1}{n}$$

1 a Dresser le tableau de variations de f_n sur $[1,+\infty[$

1 b En déduire que l'équation (E_1) n'admet pas de solution

1 c Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$, l'équation (E_n) admet deux solutions que l'on notera α_n et β_n telles que :

$$1 \leq \alpha_n \leq e^2 \leq \beta_n$$

2 a Montrer que la suite $(\beta_n)_{n\geq 2}$ est strictement monotone

2 b Montrer que la suite $(\beta_n)_{n\geq 2}$ admet une limite que l'on précisera

3 a Montrer que la suite $(\alpha_n)_{n\geq 2}$ est strictement monotone

3 b Montrer que la suite $(\alpha_n)_{n\geq 2}$ admet une limite que l'on précisera.

Ex 2

1 Soit l'équation différentielle (1) : $x^4(y'+y^2)-1=0$ sur $\mathbb{R}_+^*$

1 a Chercher une solution particulière de (1) de la forme $y_0 = \frac{ax+b}{x^2}$

1 b Poser $y = y_0 + \frac{1}{z}$ et déterminer l'équation différentielle vérifiée par z

1 c En déduire les solutions de (1).

2 Soit l'équation différentielle (2) : $x^2y'' + 4xy' + (2-x^2)y = 1$

Résoudre (2) sur $\mathbb{R}_+^*$ en effectuant le changement de fonction $z : x \mapsto x^2 y(x)$.