Exercice 1 : Une première suite récurrente

On considère la fonction g définie sur $[0, +\infty[$ par $g(x) = \dfrac{1}{1+x}$.

Soit $\mathcal{C}_2$ la courbe représentative de g dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et soit Δ la droite d'équation $y = x$. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par la donnée de son premier terme $v_0 = 0$ et, pour tout n entier naturel, par la relation $v_{n+1} = g(v_n)$.

1. Montrer que la suite v est bien définie.
2. Etudier les variations de la fonction g. En annexe figurent le tracé de $\mathcal{C}_2$ et celui de Δ dans le même repère.
3. Sur l'annexe, représenter en rouge les six premiers termes de la suite.
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \le v_n \le 1$.
5. Si la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, quelle est sa limite ? On notera a ce nombre.
6. Première méthode
   (a) Montrer que la suite $(v_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
   (b) Montrer que la suite $(v_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. On note sa limite L.
   (c) Montrer que la suite $(v_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. On note sa limite L'.
   (d) Montrer que $L = L'$ et conclure. On commencera par montrer que $L' = \dfrac{1}{1+L}$ et que $L = \dfrac{1}{1+L'}$.

la question 6 a été traitée en soutien, ne pas la faire

7. Deuxième méthode
   (a) Montrer que $I = \left[\dfrac{1}{2}, 1\right]$ est stable par g.
   (b) Montrer que $\forall x, y \in I,\ |g(x) - g(y)| \le \dfrac{4}{9}|x - y|$.
   (c) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|v_{n+1} - a| \le \dfrac{4}{9}|v_n - a|$.
   (d) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|v_n - a| \le \left(\dfrac{4}{9}\right)^n$.
   (e) Conclure.

Exercice 2 : Une deuxième suite récurrente

Etudier en fonction de u_0 la nature de la suite (u_n) définie par

$u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = e^{u_n} - 1$.

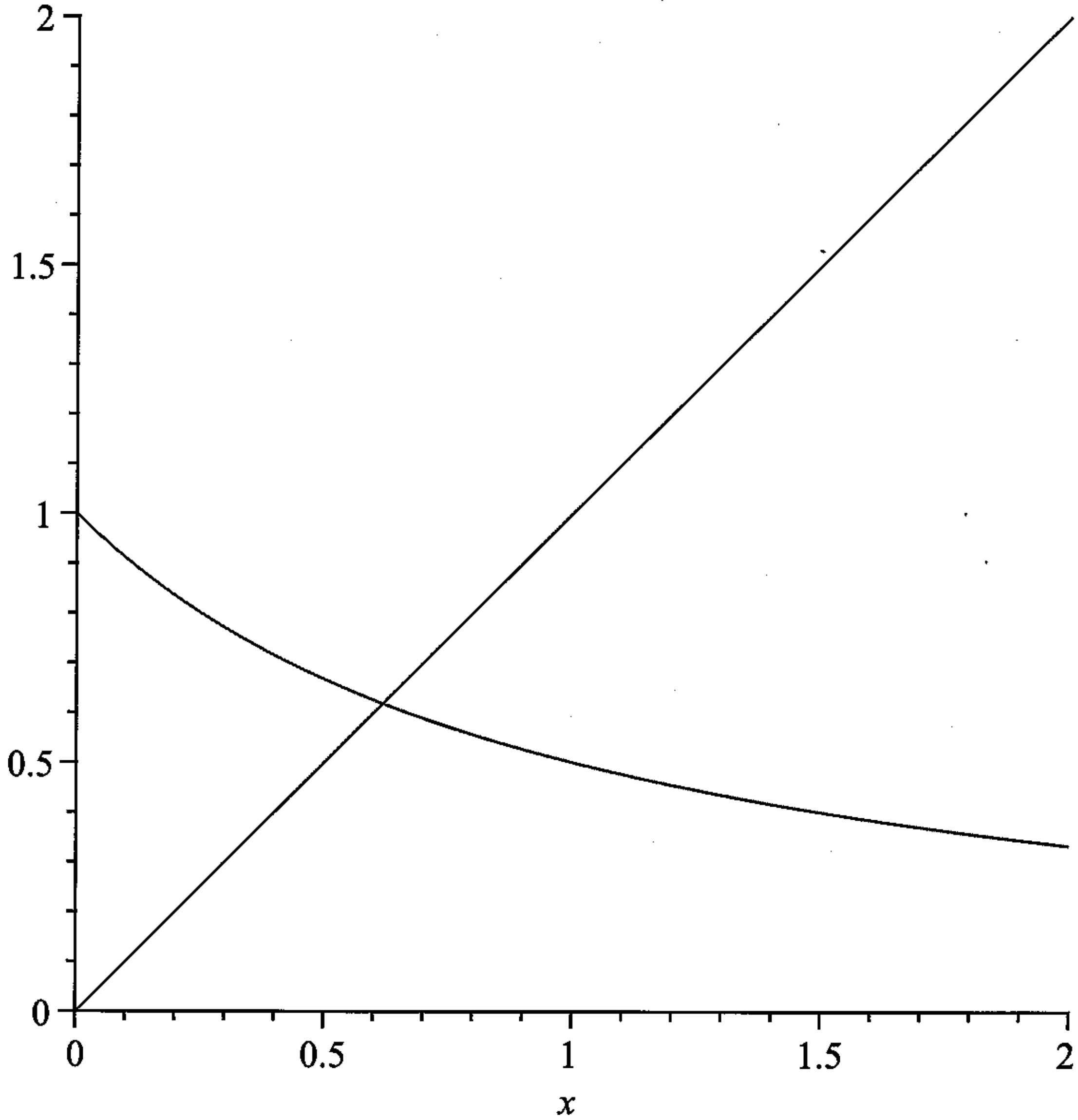
1) identifier f, étudier f et montrer qu'elle admet un unique point fixe sur $\mathbb{R}$
2) Cas $u_0 > 0$. Déterminer la monotonie de (u_n).
   En raisonnant par l'absurde, montrer que u ne converge pas.
   En déduire la nature de (u_n).
3) Reprendre les questions précédentes dans le cas où $u_0 < 0$
4) Que peut-on dire de u si $u_0 = 0$?

MPSI DM6

ANNEXE CONCERNANT L'EXERCICE 1

NOM :

PRENOM :



DM6

PROBLEME : traiter les questions A1 A2 A3 et A4. Les autres sont facultatives

L'objectif du problème est d'étudier les ensembles $\mathscr{C}$ et $\mathscr{F}$ suivants :

$$\mathscr{C}=\{ f\in C^0(\mathbb{R},\mathbb{R}) \ / \ \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y) \ \}$$

$\mathscr{F}$ est la partie constituée des éléments f de $\mathscr{C}$ tels que :

- f n'est pas la fonction identiquement nulle.
- f s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}$.

Préliminaires :

P1. Montrer que si 2 fonctions sont égales sur un ensemble D qui est dense dans $\mathbb{R}$ alors elles sont égales sur $\mathbb{R}$.

P2. Montrer que si $a\in\mathbb{R}_+^*$ alors $D_a=\left\{a\frac{p}{2^q},\ p\in\mathbb{Z},\ q\in\mathbb{N}\right\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Soit f un élément de $\mathscr{F}$. On pose $E=\{x>0 \ / \ f(x)=0\}$.

A.

A **1.** Montrer que $f(0)=1$, et que f s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}_+^*$.

A **2.** Montrer que E admet une borne inférieure que l'on note a.

A **3.** Prouver que $f(a)=0$ (on pourra raisonner par l'absurde). En déduire que : $a>0$.

A **4.** Montrer que : $\forall x\in[0,a[,\ f(x)>0$.

B. On pose $\omega=\dfrac{\pi}{2a}$, et on note g la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$: $x\mapsto\cos(\omega x)$.

B **1.** a. Soit $q\in\mathbb{N}$; montrer que : $f(\frac{a}{2^q})+1=2\left[f(\frac{a}{2^{q+1}})\right]^2$.

b. En déduire, en raisonnant par récurrence sur q, que : $\forall q\in\mathbb{N},\ f(\frac{a}{2^q})=g(\frac{a}{2^q})$.

On démontrerait de même le résultat suivant que le candidat pourra utiliser librement :

si $q\in\mathbb{N}$ est fixé : $\forall p\in\mathbb{N},\ f(p\frac{a}{2^q})=g(p\frac{a}{2^q})$.

B **2.** Prouver que : $\forall x\in D_a,\ f(x)=g(x)$.

B **3.** En déduire que $f=g$.

C. En déduire tous les éléments de $\mathscr{F}$.