

① Soit $n \in \mathbb{N}^*$ $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e^{n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)} = e^{\frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}}$

or $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - \ln(1)}{x - 0} = f'(0)$

où $f: x \mapsto \ln(1+x)$ car f est dérivable en 0

Donc $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{1}{1+0} = 1$ car $\forall x > -1$, $f'(x) = \frac{1}{1+x}$

(forme l'Hôpital avec $u = 1+x$; $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$).

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{\ln(1+x)}{x}} = e^1$ car exp cont en 1
 $= e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}}$

Concl $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = e$

② Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \left(\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n} \ln\left(\frac{1}{n}\right)}$

or $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln \sin x = \lim_{x \rightarrow 0} x \ln\left(\frac{\sin x}{x} \times x\right)$

$= \lim_{x \rightarrow 0} x \left[\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right) + \ln x \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \left[x \ln \frac{\sin x}{x} + x \ln x \right]$

$= \lim_{x \rightarrow 0} x \ln \frac{\sin x}{x} + \lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0 + 0 = 0$

car $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ et $\lim_{y \rightarrow 1} \ln y = \ln 1 = 0$ car $\ln$ cont en 1

et $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0$ par CC

Concl $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = e^0 = 1$ car exp cont en 0.

③ Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $w_n = \sqrt[n]{n^2} = (n^2)^{\frac{1}{n}} = n^{\frac{2}{n}} = e^{\frac{2}{n} \ln n}$

or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$ par CC et exp cont en 0

donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{2 \times \frac{\ln n}{n}} = e^{\lim_{n \rightarrow +\infty} 2 \frac{\ln n}{n}} = e^0 = 1$

Concl: $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 1$

④ Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$$y_n = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^n = \left(\frac{n-1}{n} \times \frac{n}{n+1}\right)^n = \left(\frac{n-1}{n}\right)^n \times \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$$

$$= \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \times \left[\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\right]^{-1} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \times \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right]^{-1}$$

or d'après q(1), $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e$ donc $\left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right]^{-1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{e}$
par l'unique de limite.

On peut montrer par un raisonnement similaire à q(1)

que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = e^{-1}$

Donc $y_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{-1} \times e^{-1}$ par produit des limites

Concl: $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = (e^{-1})^2 = e^{-2}$

⑤ Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$$z_n = \frac{3n^2 + \cos n}{4(n+1)^2 + n \sin 3n} = \frac{\frac{3n^2 + \cos n}{n^2}}{\frac{4(n+1)^2 + n \sin 3n}{n^2}}$$

$$= \frac{3 + \frac{\cos n}{n^2}}{4 \frac{(n+1)^2}{n^2} + \frac{n \sin 3n}{n^2}}$$

or $3 + \frac{\cos n}{n^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 3$ car $\frac{\cos n}{n^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

(produit d'une suite bornée avec une suite qui tend vers 0)

et $4 \frac{(n+1)^2}{n^2} + \frac{n \sin 3n}{n^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 4$ car $\left(\frac{n+1}{n}\right)^2 = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$

$\frac{n \sin 3n}{n^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ (produit d'une suite bornée avec une suite qui tend vers 0)

Donc $z_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{4}$, c'ad

$\lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = \frac{3}{4}$