Ex 1 soit $m \in \mathbb{N}^*$

①(a) f_n est dérivable sur $[1, +\infty[$ en tant que somme et quotient de fonctions dérivables sur $[1, +\infty[$

$$\forall x \in [1, +\infty[, \quad f'_n(x) = \frac{2\ln x \times \frac{1}{x} \times x - \ln(x)^2 \times 1}{x^2} = \frac{2\ln x - \ln(x)^2}{x^2} = \frac{\ln x (2 - \ln x)}{x^2}$$

$$\forall x \in [1, +\infty[, \quad \ln x \geq 0, \quad x^2 > 0 \quad \text{et} \quad 2 - \ln x > 0 \quad \text{ssi} \quad 2 > \ln x \quad \text{ssi} \quad e^2 > x$$

x	1	e^2	$+\infty$
$f'_n(x)$	+	0	-
$f_n(x)$	$-\frac{1}{m}$	$f_n(e^2)$	$-\frac{1}{m}$

$$f_n(e^2) = \frac{\ln(e^2)^2}{e^2} - \frac{1}{m} = \frac{(2\ln e)^2}{e^2} - \frac{1}{m} = \frac{4}{e^2} - \frac{1}{m}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = -\frac{1}{m} \quad \text{car par CC} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)^2}{x} = 0.$$

$$f_n(1) = \frac{\ln(1)^2}{1} - \frac{1}{m} = -\frac{1}{m}$$

①(b) Si $m=1$ alors $f_1(e^2) = \frac{4}{e^2} - 1 < 0$ car $4 < e^2$ donc $\frac{4}{e^2} < 1$
 et donc $\forall x \in [1, +\infty[, f_1(x) < 0$ d'après le tableau de variations de f_1

$$\alpha(E_1): f_1(x) = 0$$

donc (E_1) n'admet pas de solution sur $[1, +\infty[$

①(c) Soit $n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$.

f_n est strictement croissante et continue sur $[1, e^2]$ donc elle réalise une bijection de $[1, e^2]$ vers $[-\frac{1}{n}, \frac{4}{e^2} - \frac{1}{n}]$ d'après le th de la bijection

or si $m \geq 2$, alors $4m > e^2$ donc $\frac{4}{e^2} > \frac{1}{m}$ et $\frac{4}{e^2} - \frac{1}{m} > 0$ donc $0 \in [-\frac{1}{n}, \frac{4}{e^2} - \frac{1}{n}]$

Donc 0 admet un antécédent unique par f_n dans $[1, e^2]$ que l'on note α_n .

De même f_n est strictement décroissante et continue sur $[e^2, +\infty[$ donc elle réalise une bijection de $[e^2, +\infty[$ vers $]-\frac{1}{n}, \frac{4}{e^2} - \frac{1}{n}]$

or $0 \in]-\frac{1}{n}, \frac{4}{e^2} - \frac{1}{n}]$ donc 0 admet un unique antécédent par f_n dans $[e^2, +\infty[$ que l'on note β_n .

$$\text{Ainsi} \quad 1 \leq \alpha_n \leq e^2 \leq \beta_n$$

②(a) Soit $m \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$.

$$f_{n+1}(\beta_m) - f_n(\beta_m) = \frac{\ln(\beta_m)^2}{\beta_m} - \frac{1}{m+1} - \left(\frac{\ln(\beta_m)^2}{\beta_m} - \frac{1}{m} \right) = -\frac{1}{m+1} + \frac{1}{m} > 0$$

$$\text{donc} \quad f_{n+1}(\beta_m) > f_n(\beta_m) \quad \text{or} \quad f_n(\beta_m) = 0 = f_{n+1}(\beta_{n+1})$$

$$\text{donc} \quad f_{n+1}(\beta_m) > f_{n+1}(\beta_{n+1})$$

or $(\beta_m, \beta_{n+1}) \in [e^2, +\infty[$ et f_{n+1} est décroissante^{str} sur $[e^2, +\infty[$

donc f_{n+1}^{-1} est décroissante^{str} sur $]-\frac{1}{m+1}, \frac{4}{e^2} - \frac{1}{m+1}]$

$$\text{donc} \quad f_{n+1}^{-1}(f_{n+1}(\beta_m)) < f_{n+1}^{-1}(f_{n+1}(\beta_{n+1})) \quad \text{donc} \quad \beta_m < \beta_{n+1}$$

et (β_m) est strictement croissante

② (b) Soit (f_n) admet une limite finie l , soit (f_n) admet comme limite $+\infty$ par le théorème de la monotone, puisque (f_n) est strictement croissante. Raisonnons par l'absurde.

Supposons que (f_n) admet une limite finie $l \in \mathbb{R}$.

alors, comme $\forall n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(f_n)^2}{f_n} - \frac{1}{n} = 0$,

on a: $\lim_{n \rightarrow \infty} (f_n)^2 = \frac{f_n}{n}$, $\forall n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$

par passage à la limite on obtient: $\lim_{n \rightarrow \infty} (l)^2 = 0$

donc $l(l) = 0$ donc $l = 1$

or $\forall n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$, $f_n \in [e^2, +\infty[$ donc $l \in [e^2, +\infty[$.

On arrive donc à une absurdité.

Concl: (f_n) admet comme limite $+\infty$.

③ (a) Soit $n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$

$f_{n+1}(a_n) - f_n(a_n) = -\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n} > 0$ donc $f_{n+1}(a_n) > f_n(a_n)$

or $f_n(a_n) = 0 = f_{n+1}(a_{n+1})$ donc $f_{n+1}(a_n) > f_{n+1}(a_{n+1})$

or $(a_n, a_{n+1}) \in [1, e^2]^2$ et f_{n+1} est str^t croissante sur $[1, e^2]$

donc f_{n+1}^{-1} est str^t croissante sur $[-\frac{1}{n+1}, \frac{1}{e^2} - \frac{1}{n+1}]$.

donc $f_{n+1}^{-1}(f_{n+1}(a_n)) > f_{n+1}^{-1}(f_{n+1}(a_{n+1}))$ donc $a_n > a_{n+1}$

et (a_n) est strictement décroissante.

③ (b) De plus (a_n) est majorée par 1 donc par le théorème de la convergence monotone, (a_n) converge. Notons l sa limite.

Comme $\forall n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$, $a_n \in [1, e^2]$, alors $l \in [1, e^2]$.

Alors comme $\forall n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)^2 = \frac{a_n}{n}$

par passage à la limite on obtient $\lim_{n \rightarrow \infty} (l)^2 = 0$ donc $l(l) = 0$

donc $l = 1$.

Ex 2

(1)(a)

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $y_0: x \mapsto \frac{ax+b}{x^2}$

y_0 est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ en tout que prouve de fct dérivables

y_0 sol de (1) ssi $\forall x > 0, x^4 (y_0'(x) + y_0^2(x)) - 1 = 0$

ssi $\forall x > 0, x^4 \left(\frac{ax^2 - (ax+b)2x}{x^4} + \frac{(ax+b)^2}{x^4} \right) - 1 = 0$

ssi $\forall x > 0, ax^2 - 2ax^2 - 2xb + a^2x^2 + b^2 + 2axb - 1 = 0$

ssi $\forall x > 0, (a^2 - a)x^2 + (2ab - 2b)x + (b^2 - 1) = 0$

ssi $a^2 - a = 0$ et $2ab - 2b = 0$ et $b^2 = 1$

ssi $a(a-1) = 0$ et $b(a-1) = 0$ et $b = \pm 1$

ssi $(b=1 \text{ et } a=1)$ ou $(b=-1 \text{ et } a=1)$.

Pour la suite on choisit $y_0: x \mapsto \frac{x+1}{x^2}$

(1)(b)

Soit y une solution de (1). Alors y est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$

et on pose z la fonction dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ définie par $y = y_0 + \frac{1}{z}$

Alors $y' = y_0' - \frac{z'}{z^2}$

y est solution de (1) ssi $x^4 (y' + y^2) - 1 = 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$

ssi $\forall x > 0, x^4 \left(y_0'(x) - \frac{z'(x)}{z^2(x)} + \left(y_0(x) + \frac{1}{z(x)} \right)^2 \right) - 1 = 0$

ssi $\forall x > 0, x^4 \left(y_0'(x) - \frac{z'(x)}{z^2(x)} + \left(y_0(x) \right)^2 + \frac{2y_0(x)}{z(x)} + \frac{1}{z^2(x)} \right) - 1 = 0$

ssi $\forall x > 0, \underbrace{\left[x^4 (y_0'(x) + (y_0(x))^2) - 1 \right]}_{=0 \text{ car } y_0 \text{ sol de (1)}} + \frac{-x^4 \left(z'(x) + 2y_0(x)z(x) + 1 \right)}{z^2(x)} = 0$

ssi $\forall x > 0, -z'(x) + 2 \frac{x+1}{x^2} z(x) + 1 = 0$.

ssi z est sol de (2): $z' - 2 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right) z = -1$ sur $\mathbb{R}_+^*$

(1)(c)

Résolvons (2)' sur $\mathbb{R}_+^*$

(EH): $z' - 2 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right) z = 0$.

$a: x \mapsto -\frac{2}{x} - \frac{2}{x^2}$ est cont sur $\mathbb{R}_+^*$ donc elle admet des primitives sur $\mathbb{R}_+^*$. $A: x \mapsto 2 \left(-\ln x + \frac{1}{x} \right)$ est l'une d'entre elles.

Les sol de (EH) sont: $x \mapsto \lambda e^{\left(\ln x - \frac{1}{x} \right)}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

càd $x \mapsto \lambda e^{\ln x^2 - \frac{2}{x}}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ càd $x \mapsto \lambda x^2 e^{-\frac{2}{x}}$, $\lambda \in \mathbb{R}$

Déterminons une solution particulière de (2) par la méthode de variation de la constante sous la forme:

$y_p: x \mapsto \lambda(x) x^2 e^{-\frac{2}{x}}$ avec λ une fct dér sur $\mathbb{R}_+^*$

celes y_p est de sur $\mathbb{R}_+^*$ et y_p sol de (2)

4/8

ssi $\forall x > 0 \quad y_p' - 2\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right) y_p = 1$

ssi $\forall x > 0 \quad \lambda'(x) x^2 e^{-\frac{2}{x}} + \lambda(x) \left[2x e^{-\frac{2}{x}} + x^2 \frac{2}{x^2} e^{-\frac{2}{x}} \right] - 2 \frac{x+1}{x^2} \lambda(x) x^2 e^{-\frac{2}{x}} = 1$

ssi $\forall x > 0 \quad \lambda'(x) x^2 e^{-\frac{2}{x}} + \lambda(x) 2e^{-\frac{2}{x}} (x+1 - (x+1)) = 1$

ssi $\forall x > 0 \quad \lambda'(x) = \frac{e^{\frac{2}{x}}}{x^2} = \frac{1}{x^2} x e^{\frac{2}{x}}$

ssi $\forall x > 0 \quad \lambda'(x) = \frac{1}{-2} x \left(\frac{-2}{x^2} x e^{\frac{2}{x}} \right)$ on reconnaît la forme de e^u avec $u: x \mapsto \frac{2}{x}$

On propose par exemple $\forall x > 0 \quad \lambda(x) = \frac{1}{-2} x e^{\frac{2}{x}}$

Ainsi $y_p: x \mapsto \frac{1}{-2} e^{\frac{2}{x}} x^2 x e^{-\frac{2}{x}}$, soit $y_p: x \mapsto \frac{-x^2}{2}$

Ainsi $z: x \mapsto d x^2 e^{-\frac{2}{x}} - \frac{x^2}{2}, d \in \mathbb{R}$

Donc $y: x \mapsto \frac{x+1}{x^2} + \frac{1}{d x^2 e^{-\frac{2}{x}} - \frac{x^2}{2}}, d \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x > 0, d x^2 e^{-\frac{2}{x}} - \frac{x^2}{2} \neq 0$

② Soit y une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. On pose $z: x \mapsto x^2 y(x)$. z est donc aussi deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

$\forall x > 0, y(x) = \frac{z(x)}{x^2}, y'(x) = \frac{z'(x) x^2 - z(x) \cdot 2x}{x^4} = \frac{z'(x)}{x^2} - 2 \frac{z(x)}{x^3}$

$\forall x > 0 \quad y''(x) = \frac{z''(x) x^2 - z'(x) \cdot 2x}{x^4} - 2 \frac{z'(x) x^3 - z(x) 3x^2}{x^6}$

$\forall x > 0 \quad y''(x) = \frac{z''(x)}{x^2} - 4 \frac{z'(x)}{x^3} + \frac{6z(x)}{x^4}$

y sol de (2) ssi $\forall x > 0 \quad x^2 y''(x) + 4x y'(x) + (2-x^2) y(x) = 1$

ssi $\forall x > 0 \quad z''(x) - 4 \frac{z'(x)}{x} + 6 \frac{z(x)}{x^2} + 4 \frac{z'(x)}{x} - 8 \frac{z(x)}{x^2} + 2 \frac{z(x)}{x^2} - z(x) = 1$

ssi $\forall x > 0 \quad z''(x) - z(x) = 1$

ssi $\exists (d, m) \in \mathbb{R}^2$ tq $\forall x > 0, z(x) = d e^x + m e^{-x} - 1$

ssi $\exists (d, m) \in \mathbb{R}^2$ tq $\forall x > 0, x^2 y(x) = d e^x + m e^{-x} - 1$

ssi $\exists (d, m) \in \mathbb{R}^2$ tq $\forall x > 0, y(x) = \frac{d e^x}{x^2} + \frac{m e^{-x}}{x^2} - \frac{1}{x^2}$

PARTIE A

1. $y' + 2xy = 1$ est une équation différentielle linéaire du premier ordre, à coefficients non constants et non homogène.

2. a) Par récurrence :

• **Initialisation** : f étant une solution sur $\mathbb{R}$ de cette équation différentielle, on a : $f' = 1 - 2xf$.
Donc, f est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc de classe $\mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}$.

• **Hérédité** : Supposons que f soit de classe $\mathcal{C}^n$ pour un entier n donné. Alors, il en est de même (par somme et produit) de $f' = 1 - 2xf$, c'est-à-dire que f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $\mathbb{R}$.

• D'après le principe de récurrence, f est de classe $\mathcal{C}^n$ pour tout entier naturel n , c'est-à-dire que :

$$f \text{ est de classe } \mathcal{C}^\infty \text{ sur } \mathbb{R}.$$

b) En appliquant la fonction $f' + 2xf$ en 0, on obtient :

$$f'(0) = 1.$$

PARTIE B

1. Par composée de fonctions continues, la fonction $t \mapsto e^{t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc $x \mapsto \int_0^x e^{t^2} dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Comme il en est de même pour $x \mapsto e^{-x^2}$, on en déduit que, par produit :

$$D \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}.$$

De plus,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad D'(x) = -2x e^{-x^2} \int_0^x e^{t^2} dt + e^{-x^2} \cdot e^{x^2} = -2xD(x) + 1.$$

Ainsi

$$D \text{ est solution de l'équation différentielle : } y' + 2xy = 1.$$

2. D est définie sur $\mathbb{R}$ qui est symétrique par rapport à 0, et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad D(-x) = e^{-x^2} \int_0^{-x} e^{t^2} dt \stackrel{t=-u}{=} e^{-x^2} \int_0^x e^{(-u)^2} (-du) = -D(x).$$

Donc,

$$D \text{ est impaire.}$$

3. Soit $x \geq 0$. La fonction $t \mapsto t^2$ est croissante sur $[0, x]$, et la fonction exponentielle est croissante sur $\mathbb{R}$, donc, par composition : $x \mapsto e^{t^2}$ est croissante sur $[0, x]$. On peut donc écrire :

$$\forall t \in [0, x], \quad 1 \leq e^{t^2} \leq e^{x^2},$$

et ainsi, par croissance de l'intégrale :

$$x = \int_0^x 1 dt \leq \int_0^x e^{t^2} dt \leq \int_0^x e^{x^2} dt = x e^{x^2},$$

d'où :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad x e^{-x^2} \leq D(x) \leq x.$$

4. a) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Les fonctions $u : t \mapsto e^{t^2}$ et $v : t \mapsto \frac{1}{2t}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur tout segment inclus dans $\mathbb{R}_+^*$, donc on peut effectuer une intégration par parties avec : $u'(x) = 2te^{t^2}$ et $v'(t) = -\frac{1}{2t^2}$

$$\int_1^x e^{t^2} dt = \int_1^x 2te^{t^2} \times \frac{1}{2t} dt = \left[e^{t^2} \times \frac{1}{2t} \right]_1^x - \int_1^x e^{t^2} \times \frac{-1}{2t^2} dt = \left(\frac{e^{x^2}}{2x} - \frac{e}{2} \right) + \int_1^x 2te^{t^2} \times \frac{1}{4t^3} dt.$$

On effectue une seconde intégration par parties, ce qui donne :

$$\int_1^x e^{t^2} dt = \left(\frac{e^{x^2}}{2x} - \frac{e}{2} \right) + \left[e^{t^2} \times \frac{1}{4t^3} \right]_1^x - \int_1^x e^{t^2} \times \frac{-3}{4t^4} dt = \left(\frac{e^{x^2}}{2x} - \frac{e}{2} \right) + \left(\frac{e^{x^2}}{4x^3} - \frac{e}{4} \right) + \frac{3}{4} \int_1^x \frac{e^{t^2}}{t^4} dt,$$

et donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \int_1^x e^{t^2} dt = \frac{e^{x^2}}{2x} + \frac{e^{x^2}}{4x^3} - \frac{3e}{4} + \frac{3}{4} \int_1^x \frac{e^{t^2}}{t^4} dt.$$

b) h est dérivable sur $[1, +\infty[$ et :

$$h'(t) = \frac{2te^{t^2} \times t^2 - 2te^{t^2}}{t^4} = \frac{2te^{t^2}}{t^4} (t^2 - 1) \geq 0 \text{ sur } [1, +\infty[.$$

Ainsi,

$$h \text{ est croissante sur } [1, +\infty[.$$

On en déduit que :

7/8

$$\forall x \in [1, +\infty[, \forall t \in [1, x], \quad h(1) \leq h(t) \leq h(x), \quad \text{donc : } \frac{h(t)}{t^2} \leq \frac{h(x)}{t^2},$$

et, par croissance de l'intégrale :

$$\int_1^x \frac{h(t)}{t^2} dt \leq \int_1^x \frac{h(x)}{t^2} dt \quad \text{soit : } \boxed{\int_1^x \frac{e^{t^2}}{t^4} dt \leq h(x) \int_1^x \frac{dt}{t^2}}.$$

$$\text{Or, d'une part : } \int_1^x \frac{dt}{t^2} = \left[-\frac{1}{t} \right]_1^x = 1 - \frac{1}{x} \in [0, 1];$$

$$\text{et, d'autre part : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{e^{x^2}}{x^2}}{\frac{e^{x^2}}{2x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x^2} = 0. \text{ Donc, } \frac{e^{x^2}}{x^2} = o\left(\frac{e^{x^2}}{2x}\right) \text{ au voisinage de } +\infty.$$

On en déduit donc :

$$\boxed{\text{au voisinage de } +\infty : \int_1^x \frac{e^{t^2}}{t^4} dt = o\left(\frac{e^{x^2}}{2x}\right)}.$$

c) Au voisinage de $+\infty$, on a donc : $\int_1^x \frac{e^{t^2}}{t^4} dt = o\left(\frac{e^{x^2}}{2x}\right)$ et donc, de la même manière :

$$\frac{e^{x^2}}{4x^3} = o\left(\frac{e^{x^2}}{2x}\right) \quad \text{et : } \quad \frac{3e}{4} dt = o\left(\frac{e^{x^2}}{2x}\right).$$

Avec l'égalité obtenue au 4.(a), on en déduit que :

$$\boxed{\int_1^x e^{t^2} dt \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^{x^2}}{2x}}.$$

Par produit, on en déduit enfin :

$$\boxed{D(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2x}}.$$

5. a) On a déjà vu que D est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que : $D'(x) = 1 - 2xD(x)$. Donc, sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$D'(x) > 0 \Leftrightarrow 1 > 2xD(x) = 2xe^{-x^2} \int_0^x e^{t^2} dt \Leftrightarrow \frac{e^{x^2}}{2x} - \int_0^x e^{t^2} dt > 0.$$

Posons $u : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \frac{e^{x^2}}{2x} - \int_0^x e^{t^2} dt$. Alors, u est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad u'(x) = \frac{2xe^{x^2} \times 2x - 2e^{x^2}}{(2x)^2} - e^{x^2} = -\frac{e^{x^2}}{2x^2} < 0.$$

Ainsi, u est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ avec : $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} u(x) = +\infty$ et : $u(1) = \frac{e}{2} - \int_0^1 e^{t^2} dt$. Or, on sait que : $\forall t \in \mathbb{R}, e^t \geq 1 + t$ et donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \int_0^x e^t dt \geq \int_0^x (1+t) dt \quad \text{soit : } e^x - 1 \geq x + \frac{x^2}{2},$$

d'où : $\forall t \in \mathbb{R}, e^{t^2} \geq 1 + t^2 + \frac{t^4}{2}$, et donc :

$$\int_0^1 e^{t^2} dt \geq \int_0^1 \left(1 + t^2 + \frac{t^4}{2}\right) dt = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{10} \approx 1,433.$$

Or, $\frac{e}{2} \approx 1,359$, donc on en déduit que : $u(1) < 0$. On a donc le tableau de variations suivant :

8/8

x	0	b	1	$+\infty$
u	$+\infty$	0	$u(1) < 0$	
$D'(x)$	1	+	0	-
D	0	$f(b)$	0	0

Ainsi,

D admet un maximum, atteint en un point $b \in]0, 1[\subset \mathbb{R}_+^*$.

b) D'après le calcul précédent, b est le réel strictement positif tel que : $\int_0^b e^{t^2} dt = \frac{e^{b^2}}{2b}$. On a donc :

$$D(b) = e^{-b^2} \int_0^b e^{t^2} dt = e^{-b^2} \times \frac{e^{b^2}}{2b} = \frac{1}{2b}.$$

Donc :

Le maximum de D sur $\mathbb{R}_+^*$ est $\frac{1}{2b}$.

c) D'après les variations de D , ce maximum est atteint en un point unique $b \in]0, 1[$. Or, on a vu à la question 2. que D est impaire, et donc on en déduit que D est négative sur $\mathbb{R}_-$. Finalement :

D atteint son maximum uniquement en b .

PARTIE C

1. • On résout d'abord l'équation homogène : $y' + 2xy = 0$. Puisqu'une primitive de $x \mapsto 2x$ est : $x \mapsto x^2$, on en déduit que les solutions de l'équation homogène sont les fonctions :

$$y_h : x \mapsto C e^{-x^2}, \quad \text{où } C \text{ est une constante réelle.}$$

• Une solution particulière est la fonction D de la partie B.

• Donc :

Les solutions de l'équation différentielle $y' + 2xy = 1$ sont :

$$x \mapsto D(x) + C e^{-x^2} = e^{-x^2} \int_0^x e^{t^2} dt + C e^{-x^2}, \quad \text{avec } C \in \mathbb{R}.$$

2. On sait que D est une solution de l'équation et que D est impaire, d'où l'existence. Déterminons C pour que la solution "générale" y précédente soit impaire. On a donc :

$$y(-x) = D(-x) + C e^{-x^2} = -D(x) + C e^{-x^2}.$$

Donc : $y(-x) = -y(x) \Leftrightarrow C = -C \Leftrightarrow C = 0$. Ainsi :

L'équation différentielle $y' + 2xy = 1$ possède une unique solution impaire : la fonction D .