Exercice 1 — CORRIGÉ DU DM 6 :

① g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$ et $g(\mathbb{R}^+) =]0,1] \subset \mathbb{R}^+$

x	0	$+\infty$
$g(x)$	$1 \searrow$	0

donc $\mathbb{R}^+$ est stable par g.

or $v_0 = 0 \in \mathbb{R}^+$ donc v est bien définie

② voir au dessus

③ voir annexe

④ $\forall n \in \mathbb{N}$ on pose P_n : "$0 \leq v_n \leq 1$". On montre par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$ P_n est vraie.

- P_0 vraie car $v_0 = 0$
- supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tq P_n vraie
  alors $0 \leq v_n \leq 1$ et g est décroissante sur $\mathbb{R}^+$
  donc $g(0) \geq v_{n+1} \geq g(1)$ donc $1 \geq v_{n+1} \geq g(1) > 0$ car $g(1) = \frac{1}{2}$
  donc P_{n+1} vraie
- concl $\forall n \in \mathbb{N}$ P_n vraie

⑤ On suppose que (v_n) est convergente. Soit a la limite de (v_n)
Comme $v_{n+1} = g(v_n)$ $\forall n \in \mathbb{N}$, par passage à la limite :

$$a = \lim_{n \to +\infty} g(v_n) = g(a) \text{ car } g \text{ est continue sur } \mathbb{R}^+$$

or $a \in \mathbb{R}^+$ puisque $\forall n \in \mathbb{N}$ $v_n \geq 0$.
Conclusion : si (v_n) converge, sa limite est le nombre réel positif a tel que $g(a) = a$.
Soit $a \geq 0$ $g(a) = a$ ssi $a = \frac{1}{1+a}$ ssi $a^2 + a = 1$ ssi $a^2 + a - 1 = 0$
ssi $a = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$ ssi $\boxed{a = \frac{\sqrt{5}-1}{2}}$ car $a \in \mathbb{R}^+$

⑥ ⓐ Soit P_n : "$v_{2(n+1)} \geq v_{2n}$". Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}$ P_n vraie.

- $v_0 = 0$, $v_1 = 1$, $v_2 = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} > v_0$
- supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tq P_n vraie
  alors $v_{2n+2} \geq v_{2n} \geq 0$ on applique 2 fois g
  $0 < g(v_{2n+2}) \leq g(v_{2n})$ donc $0 < v_{2n+3} \leq v_{2n+1}$
  donc $g(0) > g(v_{2n+3}) \geq g(v_{2n+1})$
  donc $v_{2n+4} \geq v_{2n+2}$ et P_{n+1} vraie
- Concl : $\forall n \in \mathbb{N}$ P_n vraie et (v_{2n}) est croissante

⑥ ⓑ Montrons que (v_{2n}) est majorée par a.
Soit P_n : "$v_{2n} \leq a$". Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}$, P_n vraie

- $v_0 = 0 \leq a$
- supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tq P_n vraie alors $v_{2n} \leq a$
  on applique 2 fois g : $g(v_{2n}) \geq g(a)$ donc $v_{2n+1} \geq a$
  et $g(v_{2n+1}) \leq g(a)$ donc $v_{2n+2} \leq a$.
- Concl : $\forall n \in \mathbb{N}$ P_n vraie et (v_{2n}) majorée

Comme (v_{2n}) est croissante et majorée, elle CV. Soit L sa limite

6c) De même, on montre que (v_{2n+1}) est décroissante et minorée par a donc (v_{2n+1}) converge. Soit L' sa limite

6d) $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{2n+1} = g(v_{2n})$ Par passage à la limite : $L' = g(L)$ car g est continue en $L \in \mathbb{R}^+$ ($L \geq 0$ car $\forall n \in \mathbb{N}$ $v_n \geq 0$)

$\forall n \in \mathbb{N}$ $v_{2n+2} = g(v_{2n+1})$ Par passage à la limite :

$L = g(L')$ car g est continue en $L' \in \mathbb{R}^+$

($L' \geq 0$ car $\forall n \in \mathbb{N}$ $v_n \geq 0$)

on a donc $L' = \dfrac{1}{1+L} = \dfrac{1}{1+\frac{1}{1+L'}}$ ssi $L' = \dfrac{1}{\frac{1+L'+1}{1+L'}}$

ssi $L' = \dfrac{1+L'}{2+L'}$ ssi $2L' + L'^2 = 1 + L'$ ssi $L'^2 + L' - 1 = 0$

ssi $L' = \dfrac{-1+\sqrt5}{2}$ ou $\dfrac{-1-\sqrt5}{2}$ Or $L' \geq 0$ donc $L' = \dfrac{-1+\sqrt5}{2}$

De même $L = \dfrac{-1+\sqrt5}{2}$ donc $L = L' = a$.

et comme (v_{2n}) et (v_{2n+1}) CV vers la même limite, (v_n) CV vers a.

7a)

x	$1/2$	1
$g(x)$	$\frac{2}{3}$ ↘	$\frac{1}{2}$

$g\left(\frac12\right) = \dfrac{1}{1+\frac12} = \dfrac{1}{\frac32} = \dfrac23$

$g(1) = \dfrac{1}{1+1} = \dfrac12$

Comme $\left[\frac12, \frac23\right] \subset \left[\frac12, 1\right]$ on peut dire que I est stable par g

7b) Soit $x, y \in I = \left[\frac12, 1\right]$

$|g(x) - g(y)| = \left| \dfrac{1}{1+x} - \dfrac{1}{1+y} \right| = \left| \dfrac{1+x-1-y}{(1+x)(1+y)} \right| = \dfrac{|x-y|}{(1+x)(1+y)}$ car $1+x > 0$, $1+y > 0$

$x \in \left[\frac12, 1\right] \Rightarrow \frac12 \leq x \leq 1 \Rightarrow \frac32 \leq 1+x \leq 2 \Rightarrow \frac12 \leq \dfrac{1}{1+x} \leq \frac23$

Donc $\frac12 \times \frac12 \leq \dfrac{1}{1+x}\dfrac{1}{1+y} \leq \frac23 \times \frac23$ donc $\dfrac{1}{(1+x)(1+y)} \leq \dfrac49$

Ainsi $\boxed{|g(x) - g(y)| \leq |x-y| \frac49}$

7c) Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $x = v_n$ et $y = a$. $v_n \in I$ et $a \in I$

Donc $|g(v_n) - g(a)| \leq |v_n - a| \times \frac49 \Rightarrow |v_{n+1} - a| \leq \frac49 |v_n - a|$

7d) Soit $n \in \mathbb{N}$. P_n : " $|v_n - a| \leq \left(\frac49\right)^n$ ". Mq P_n vraie par récurrence

* $|v_0 - a| = \dfrac{\sqrt5 - 1}{2} \leq \left(\frac49\right)^0 = 1$
* supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tq $|v_n - a| \leq \left(\frac49\right)^n$

alors $|v_{n+1} - a| \leq \frac49 |v_n - a| \leq \frac49 \times \left(\frac49\right)^n = \left(\frac49\right)^{n+1}$ donc P_{n+1}

* Concl : $\forall n \in \mathbb{N}$ P_n vraie

7e) Comme $\left(\frac49\right)^n$ CV vers 0, (v_n) CV vers a

Exercice 2 :

① Soit $f : x \mapsto e^x - 1$

f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	-1 $\nearrow$	0	$\nearrow$ $+\infty$

Soit $l \in \mathbb{R}$

$f(l) = l$ ssi $e^l - 1 = l$ ssi $e^l - l - 1 = 0$.

Soit $g : x \mapsto e^x - x - 1$ g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$ $g'(x) = e^x - 1$

$g'(x) > 0$ ssi $e^x > 1$ ssi $x > 0$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g(x)$	$+\infty$ $\searrow$	0	$\nearrow$ $+\infty$

On a donc $g(x) = 0$ ssi $x = 0$

puisque g est continue sur $\mathbb{R}$ et d'après son tableau de variations

Ainsi $e^l - 1 = l$ ssi $l = 0$: g a un unique point fixe $l = 0$.

② (u_n) est bien définie car $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.

Monotonie de (u_n) : d'après la propriété P34

- si $u_1 > u_0$ alors on montre par récurrence que (u_n) est strictement croissante
- si $u_1 = u_0$ alors on montre par récurrence que (u_n) est constante
- si $u_1 < u_0$ alors on montre par récurrence que (u_n) est strictement décroissante

Cherchons dans quel cas $u_1 > u_0$.

$u_1 > u_0$ ssi $e^{u_0} - 1 > u_0$ ssi $e^{u_0} - u_0 - 1 > 0$ ssi $g(u_0) > 0$
ssi $u_0 \neq 0$ d'après ce qui précède (2e tableau de variations)

$u_1 = u_0$ ssi $u_0 = 0$

Conclusion :

- si $u_0 \in \mathbb{R}_+^*$ alors (u_n) est croissante strictement
Supposons qu'elle CV et notons l sa limite.
$\forall n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} = e^{u_n} - 1$ Par passage à la limite,
Comme f est continue en l, on a : $l = \lim\limits_{n \to +\infty} (e^{u_n} - 1)$
$= \lim\limits_{n \to +\infty} (f(u_n))$
$= f(l)$

c'est la prop P34 bis

or $f(l) = l$ ssi $l = 0$

donc si (u_n) CV, (u_n) CV vers 0.

Absurde car $u_0 > 0$ et (u_n) strictement croissante.

Conclusion : si $u_0 > 0$ alors (u_n) DV (vers $+\infty$)

se montre par récurrence en utilisant que $f(]-\infty, 0[) =]-1, 0[$.

③ • si $u_0 \in \mathbb{R}_-^*$ alors (u_n) est strictement croissante et majorée par 0
donc par le théorème de la limite monotone, (u_n) CV ;
avec le même raisonnement que précédemment, on obtient
que (u_n) CV vers 0.

④ • si $u_0 = 0$ alors (u_n) est constante égale à 0.
Elle CV vers 0.

DM6 cor

Problème

P1 Soient f et g deux fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
Soit D une partie dense dans $\mathbb{R}$. On suppose que $\forall x \in D$, $f(x)=g(x)$
Soit $x \in \mathbb{R} \setminus D$. On sait que D est dense dans $\mathbb{R}$ donc par caractérisation séquentielle de la densité, on en déduit que : il existe une suite (u_n) d'éléments de D telle que (u_n) converge vers x.

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a
$$|f(x)-g(x)| = |f(x)-f(u_n)+f(u_n)-g(x)|$$
$$\leq |f(x)-f(u_n)| + |f(u_n)-g(x)|$$
$$\leq |f(x)-f(u_n)| + |g(u_n)-g(x)|$$

car comme $u_n \in D$, $f(u_n)=g(u_n)$.

Comme (u_n) converge vers x et que f est continue sur $\mathbb{R}$ donc en x : $(f(u_n))$ converge vers $f(x)$. De même, comme g est continue en x, $(g(u_n))$ converge vers $g(x)$.

Ainsi $(f(x)-f(u_n))$ converge vers 0 et $(g(x)-g(u_n))$ également.

Donc $(|f(x)-f(u_n)|+|g(u_n)-g(x)|)$ converge vers 0 par somme.

Par le théorème d'encadrement, comme
$\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \leq |f(x)-g(x)| \leq |f(x)-f(u_n)| + |g(u_n)-g(x)|$
on obtient que $(|f(x)-g(x)|)$ converge vers 0. Or c'est une suite constante donc $|f(x)-g(x)|=0$, càd

$f(x)=g(x)$.

De plus $\forall x \in D$, $f(x)=g(x)$.

$\boxed{\text{Concl : } \forall x \in \mathbb{R},\ f(x)=g(x)}$

P2 Soit $a>0$
Soit $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$ tq $x<y$. Mq il existe $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}$ tq $x \leq \frac{ap}{2^q} \leq y$. Comme $x<y$, $\frac{y-x}{a}>0$.
D'après la propriété d'Archimède, il existe $n \in \mathbb{N}$ tq $n\left(\frac{y-x}{a}\right) \geq 1$. Posons alors $q = 1+\left\lfloor \frac{\ln n}{\ln 2} \right\rfloor = \lfloor \log_2(n) \rfloor + 1$

Ainsi $q > \frac{\ln n}{\ln 2}$ donc $q \ln 2 > \ln n$ donc $\ln 2^q > \ln n$ et $2^q > n$
donc $2^q\left(\frac{y-x}{a}\right) > n\left(\frac{y-x}{a}\right) \geq 1$ donc $2^q\frac{y}{a} - \frac{2^q x}{a} \geq 1$.

Ainsi il existe $p \in \mathbb{Z}$ tq $\frac{2^q x}{a} \leq p \leq \frac{2^q y}{a}$

et donc $x \leq \frac{pa}{2^q} \leq y$

Concl : D_a est dense dans $\mathbb{R}$

$\boxed{A1}$ • $f \in \mathcal{F}$ donc f est continue sur $\mathbb{R}$ et $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ $f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y)$
et f n'est pas la fonction identiquement nulle
et f s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}$.

$f(0)+f(0)=2f(0)f(0)$ (en prenant $x=y=0$)

donc $2f(0)=2f(0)\times f(0)$ donc $2f(0)\,(1-f(0))=0$

donc $f(0)=0$ ou $f(0)=1$.

Or si $f(0)=0$ alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x+0)+f(x-0)=2f(x)f(0)$
($y=0$) càd $\forall x \in \mathbb{R}$ $2f(x)=2f(x)\times 0=0$
donc $\forall x \in \mathbb{R}$ $f(x)=0$ or f n'est pas identiquement nulle
Donc $f(0)\neq 0$ donc $\underline{f(0)=1}$.

• f est paire. En effet, pour tout $y \in \mathbb{R}$, $f(0+y)+f(0-y)=2f(0)f(y)$
càd $f(y)+f(-y)=2\times 1\times f(y)=2f(y)$ donc $f(-y)=f(y)$.
Comme f s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}$, il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tq $f(x_0)=0$. Si $x_0 \in \mathbb{R}_-^*$ alors, comme $f(-x_0)=f(x_0)$, $f(-x_0)=0$ donc f s'annule en $-x_0 \in \mathbb{R}_+^*$. De plus $f(0)\neq 1$
Concl : f s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}_+^*$.

$\boxed{A2}$ $E=\{x>0,\ f(x)=0\}$

Par définition $E \subset \mathbb{R}$. $E \neq \emptyset$ d'après la question précédente (f s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}_+^*$).
E est minorée par 0 par définition.
Par la prop de la borne inf, $\underline{E \text{ admet donc une borne inférieure}}$

$\boxed{A3}$ Supposons que $f(a)\neq 0$.
Comme $a=\inf(E)$, il existe une suite u d'éléments de E qui converge vers a.
Comme f est continue sur $\mathbb{R}$, f est continue en a donc $(f(u_n))$ converge vers $f(a)$

or $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(u_n) = 0$ puisque $u_n \in E$
donc $(f(u_n))$ est une suite constante égale à 0.
Elle converge donc vers 0.
Par unicité de la limite $0 = f(a) \rightarrow$ contradiction avec $f(a) \neq 0$
Conclusion $f(a) = 0$.

Par ailleurs $a = \inf(E)$ donc a est le plus grand des minorants de E
De plus 0 est un minorant de E donc $0 \leq a$.
D'après ce qui précède, $f(a) = 0$. Raisonnons par l'absurde pr mq $a > 0$.
Supposons que $a = 0$ alors $f(a) = f(0)$ or $f(0) = 1$ absurde $1 \neq 0$
donc $a \neq 0$ donc $0 < a$

$\boxed{A4}$ • $a = \inf(E)$ donc $\forall x \in E$, $x \geqslant a > 0$
donc $E \subset [a, +\infty[$ donc $E \cap [0, a[= \emptyset$
donc $\forall x \in [0, a[$, $x \notin E$
donc $\forall x \in [0, a[$, $x = 0$ ou $f(x) \neq 0$ or $f(0) = 1 \neq 0$
donc $\forall x \in [0, a[$, $f(x) \neq 0$
• Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe $x_0 \in [0, a[$ tq $f(x) < 0$.
Comme $f(0) = 1 > 0$, comme $f(x_0) < 0$ et comme f est continue sur $[0, x_0]$, d'après le TVI, il existe $x_1 \in [0, x_0] \subset [0, a[$ tel que $f(x_1) = 0$ ABSURDE puisque $\forall x \in [0, a[$, $f(x) \neq 0$
donc $\forall x \in [0, a[$, $f(x) \geqslant 0$
et comme $\forall x \in [0, a[$, $f(x) \neq 0$ $\Big\} \Rightarrow \forall x \in [0, a[$, $f(x) > 0$.

$\boxed{B1}\boxed{a}$ Soit $q \in \mathbb{N}$, $f\left(\frac{a}{2^{q+1}} + \frac{a}{2^{q+1}}\right) + f\left(\frac{a}{2^{q+1}} - \frac{a}{2^{q+1}}\right) = 2 f\left(\frac{a}{2^{q+1}}\right) f\left(\frac{a}{2^{q+1}}\right)$
puisque $f \in \mathcal{F} \subset \mathcal{E}$.
Ainsi $f\left(2 \times \frac{a}{2^{q+1}}\right) + f(0) = 2\left(f\left(\frac{a}{2^{q+1}}\right)\right)^2$ càd $f\left(\frac{a}{2^q}\right) + 1 = 2\left(f\left(\frac{a}{2^{q+1}}\right)\right)^2$

$\boxed{B1b}$ Soit $q \in \mathbb{N}$. $\mathcal{P}(q)$: " $f\left(\frac{a}{2^q}\right) = g\left(\frac{a}{2^q}\right)$ ". Mq $\forall q \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ vraie en raisonnant par récurrence

Initialisation : si $q = 0$ alors $f\left(\frac{a}{2^0}\right) = f(a)$ et $g\left(\frac{a}{2^0}\right) = g(a)$.
or d'après A3, $f(a) = 0$ et $g(a) = \cos(\omega a) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

hérédité : supposons que $\mathcal{P}(q)$ vraie pour un certain $q \in \mathbb{N}$
Mq $\mathcal{P}(q+1)$ vraie.
$$\left(f\left(\frac{a}{2^{q+1}}\right)\right)^2 = \frac{1}{2}\left(f\left(\frac{a}{2^q}\right) + 1\right) \overset{HR}{=} \frac{1}{2}\left(g\left(\frac{a}{2^q}\right) + 1\right) = \frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{\omega a}{2^q}\right) + 1\right)$$

$$\left(f\left(\frac{a}{2^{q+1}}\right)\right)^2 = \frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2a}\times\frac{a}{2^q}\right)+1\right) = \frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2^{q+1}}\right)+1\right) = \frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{2\pi}{2^{q+2}}\right)+1\right)$$

or $\left(g\left(\frac{a}{2^{q+1}}\right)\right)^2 = \left(\cos\left(\frac{\pi}{2a}\times\frac{a}{2^{q+1}}\right)\right)^2 = \left(\cos\left(\frac{\pi}{2^{q+2}}\right)\right)^2$

et $\cos\left(2\times\frac{\pi}{2^{q+2}}\right) = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{2^{q+2}}\right)-1$

donc $\frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{2\pi}{2^{q+2}}\right)+1\right) = \frac{1}{2}\left(2\cos^2\left(\frac{\pi}{2^{q+2}}\right)-1+1\right) = \cos^2\left(\frac{\pi}{2^{q+2}}\right)$

Ainsi $f\left(\frac{a}{2^{q+1}}\right)$ et $g\left(\frac{a}{2^{q+1}}\right)$ ont le même carré. De plus, comme $q\in\mathbb{N}$, $\frac{a}{2^{q+1}}\in[0,a[$ donc $f\left(\frac{a}{2^{q+1}}\right)>0$ d'après A4.

et $g\left(\frac{a}{2^q}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2a}\times\frac{a}{2^q}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2^{q+1}}\right) \geq 0$ puisque $\frac{\pi}{2^{q+1}}\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

Donc $f\left(\frac{a}{2^{q+1}}\right) = g\left(\frac{a}{2^{q+1}}\right)$ puisque ces 2 nombres ont le même signe.

et $\mathcal{P}(q+1)$ vraie

Concl : $\forall q\in\mathbb{N}$, $\mathcal{P}(q)$ vraie

B2 Soit $x\in\mathcal{D}_a$. Alors il existe $p\in\mathbb{Z}$ et $q\in\mathbb{N}$ tq $x=\frac{ap}{2^q}$.

- si $p\geq 0$ alors $f(x)=f\left(\frac{ap}{2^q}\right)=g\left(\frac{ap}{2^q}\right)$ d'après l'énoncé.
- si $p<0$ alors $f(x)=f(-x)=f\left(-\frac{ap}{2^q}\right)=g\left(\frac{-ap}{2^q}\right)=g\left(\frac{ap}{2^q}\right)$ car g est paire puisque cos l'est.

car $-p\in\mathbb{N}$ et d'après l'énoncé

Dans les 2 cas, $f(x)=g\left(\frac{ap}{2^q}\right)=g(x)$.

B3 Comme Da est dense dans $\mathbb{R}$ (P2) et que $\forall x\in D_a$, $f(x)=g(x)$ (cf B2) on en déduit d'après P1 que $f=g$

C D'après ce qui précède, si $f\in\mathcal{F}$ alors $f: x\mapsto\cos(\omega x)$ avec $\omega\in\mathbb{R}$

Réciproquement, soit $f: x\mapsto\cos(\omega x)$ avec $\omega\in\mathbb{R}^*$
on vérifie que f n'est pas identiquement nulle, que f s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}$, par exemple au point $\frac{\pi}{2\omega}$ et que $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$ $\cos(\omega x+\omega y)+\cos(\omega x-\omega y) = 2\cos(\omega x)\cos(\omega y)$

Donc $\mathcal{F}=\{x\mapsto\cos(\omega x),\ \omega\in\mathbb{R}^*\}$

Exercice : Une deuxième suite récurrente

Etudier en fonction de u_0 la nature de la suite (u_n) définie par
$u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = e^{u_n} - 1$. On distinguera 3 cas.

ANNEXE CONCERNANT L'EXERCICE 1

NOM :

PRENOM :