

Semaine du 06/01

Chapitre 11 : Suites numériques

Limite d'une suite réelle

Limite finie ou infinie d'une suite. Les définitions sont énoncées avec des inégalités larges. Unicité de la limite. Suite convergente, suite divergente. Toute suite réelle convergente est bornée. Opérations sur les limites : combinaisons linéaires, produit, quotient. Produit d'une suite bornée et d'une suite de limite nulle. Stabilité des inégalités larges par passage à la limite. Si (u_n) converge vers $\ell > 0$ alors $u_n > 0$ à partir d'un certain rang. Existence d'une limite par encadrement (limite finie), par minoration (limite $+\infty$), par majoration (limite $-\infty$). Utilisation d'une majoration de la forme $|u_n - \ell| \leq v_n$, où (v_n) converge vers 0.

Théorèmes d'existence d'une limite

Théorème de convergence par encadrement. Théorèmes de divergences par minoration ou majoration. Théorème de la limite monotone. Théorème des suites adjacentes.

Suites extraites

Suite extraite. Si une suite possède une limite, toutes ses suites extraites possèdent la même limite. Utilisation pour montrer la divergence d'une suite. Si (u_{2n}) et (u_{2n+1}) tendent vers ℓ alors (u_n) converge vers ℓ . Théorème de Bolzano-Weierstrass.

Traduction séquentielle de certaines propriétés

Partie dense de $\mathbb{R}$. Densité de $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Caractérisation séquentielle de la densité. Si X est une partie non vide majorée de $\mathbb{R}$, il existe une suite d'éléments de X de limite $\sup X$. Si X est une partie non vide non majorée de $\mathbb{R}$, il existe une suite d'éléments de X de limite $+\infty$. Résultats analogues pour X non vide minorée.

Suites complexes

Brève extension des définitions et résultats précédents. Caractérisation de la limite en termes de parties réelle et imaginaire. Théorème de Bolzano-Weierstrass.

Suites particulières

Suites arithmétiques, géométriques, arithmético-géométriques.

Suites récurrentes linéaires homogènes d'ordre 2 à coefficients constants.

Présentation de l'étude des suites définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ sur quelques exemples simples. Représentation géométrique. Si (u_n) converge vers un élément ℓ en lequel f est continue, alors $f(\ell) = \ell$.

Question de cours avec démonstration :

- $\diamond$ théorème d'encadrement des limites (th3)
- Si X est une partie non vide majorée de $\mathbb{R}$, il existe une suite d'éléments de X de limite $\sup X$. (propriété 33 item 1).
- Si X est une partie non vide non majorée de $\mathbb{R}$, il existe une suite d'éléments de X de limite $+\infty$ (propriété 33 item 2).
- Soit u telle que $u_0 = \alpha$, $u_1 = \beta$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} + au_{n+1} + bu_n = 0$, avec $b \neq 0$. Si l'équation du second degré $x^2 + ax + b = 0$ admet deux racines distinctes $r_1 \neq r_2$, alors $\exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ $u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$ (th5).
- $\diamond$ Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite complexe.
 u converge dans $\mathbb{C}$ ssi $\operatorname{Re} u$ et $\operatorname{Im} u$ convergent dans $\mathbb{R}$.
 De plus, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \operatorname{Re}(u_n) + i \lim_{n \rightarrow +\infty} \operatorname{Im}(u_n)$ (P36).

Chapitre 12 : Structures algébriques usuelles

Loi de composition interne

Loi de composition interne. Associativité, commutativité, élément neutre, inversibilité, distributivité. Inversibilité et inverse du produit de deux éléments inversibles. Partie stable.

Structure de groupe

Groupe. Exemples usuels de groupes additifs et multiplicatifs. Groupe des permutations d'un ensemble X (notation S_X). Groupe produit. Sous-groupe : définition, caractérisation. Morphisme de groupes. Vocabulaire : isomorphisme, endomorphisme, automorphisme. Image directe et réciproque d'un sous-groupe par un morphisme.

Structure d'anneau

Anneau. Exemples usuels : $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$. Calcul dans un anneau. Relation $a^n - b^n$ et formule du binôme si a et b commutent. Groupe des inversibles d'un anneau. Anneau intègre. Corps. Sous-anneau.

Question de cours avec démonstration :

◊ Soient $(E, *)$ et $(F, \perp)$ deux groupes. On définit sur $E \times F$ la loi de composition $\otimes : (x, y) \otimes (x', y') = (x * x', y \perp y')$. $(E \times F, \otimes)$ est un groupe (D12).

Les élèves ◊ ne seront interrogés que sur les démonstrations qui contiennent un ◊ (voir page suivante les groupes de colles).

Il y a deux groupes de colles vides : les groupes 7 et 14.

Tout élève absent doit signaler son absence au plus tôt au colleur par l'intermédiaire du cahier de prépa, AVANT la colle ! et doit ensuite contacter le colleur pour rattraper cette colle à son retour.

Chaque élève sera interrogé en début de colle sur des questions de cours et devra restituer une démonstration parmi celles listées ci-dessus. Chaque élève aura à étudier en début de colle une suite récurrente linéaire d'ordre 2 et à déterminer si un ensemble muni d'une loi de composition interne est un groupe (à l'aide de la définition ou à l'aide de la caractérisation d'un sous-groupe d'un groupe donné/usuel). Les exercices porteront ensuite sur les suites (étude d'une suite complexe, exercices plus théoriques), sur les lois de compositions internes, sur le groupe symétrique, sur les structures d'anneaux, sous-anneaux, corps, ou sur les calculs dans un anneau.

Une note sur 20 sera donnée à l'issue de la colle, qui sera décomposée en une note sur 10 relative à son niveau de maîtrise des connaissances du cours tout au long de la colle (y compris dans les exercices) et une note sur 10 relative à sa capacité à calculer, à chercher, à raisonner, à mettre en oeuvre des méthodes et des stratégies, à maîtriser le formalisme mathématique, à argumenter et à communiquer.

Groupes de colle :

Gentil Thibaud

G1 François Matti
Fournet Simon
Douay Zoé

G9 Morchid Hiba
Personne Tom
Landot Carla ◊

G2 Lozay-Vandenberghe Titouan
Savodnik Nicolaj
Postel Esteban ◊

G10 Cornet Chloé
Buisine Marine
Debeauvais Clara

G3 Boulard Louna (LV2) ◊
Dairaine Nathan
Chable Noa

G11 Caron Alexandre ◊
Simon Robert ◊
Fourel Maïa

G4 Senente Simon ◊
Deblangy Edouard
Kraniki Enes

G12 Catto Gabriel
Fournier Antoine

G5 Bève Enzo ◊
Vilbert Lilian
Cozette Lise

G13 Karafi Ahmed ◊
Faye Cheikh-Tidiane
Gouacide Mathys ◊

G6 Mete Ilhan
Felix Julien
Gautherin Jules (LV2)

G15 Canon Asybiade ◊
Loudahi Abraham
Ramzi Sara

G8 Thiou Maxime
Gressier Corentin

G16 : Moussaïd Soufiane
Watel Aurélien ◊
Le Gociv Edenn