Exercices sur la densité - MPSI. Commencez par l'exercice 1, puis 2, 3 et 4

Exercice 4 :

Soit (u_n) une suite réelle telle que $(u_{n+1}-u_n)$ CV vers 0 et (u_n) DV vers $+\infty$. Soit (v_n) une suite réelle qui DV vers $+\infty$.

On fixe deux réels a et b tels que $a < b$.

Pour p et q dans $\mathbb{N}$, on pose $(w_n) = (u_{n+p} - v_q)$

1) Montrer que l'on peut choisir p et q de telle sorte que $w_0 \leq a$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $|w_{n+1} - w_n| \leq \frac{b-a}{2}$
2) On suppose qu'on fait ce choix de p et de q. Montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $w_N \leq a$ et $w_{N+1} > a$
3) En déduire que l'ensemble $B = \{u_r - v_s \mid (r,s) \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Exercice 3 :

Montrer que $\{m - \ln(n) \mid (m,n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*\}$ est dense dans $\mathbb{R}$

Exercice 2 :

On pose $A = \{\sqrt{m} - \sqrt{n}, (m,n) \in \mathbb{N}^*\}$. On veut montrer que A est dense dans $\mathbb{R}$

1) Montrer le lemme suivant :

Soit $X \subset \mathbb{R}$ tel que a) $\forall a \in X, \forall n \in \mathbb{N}, n.a \in X$

b) $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta \in X$ tq $0 < \delta < \varepsilon$

Alors X est dense dans $\mathbb{R}^+$

Et si en plus X est stable par $-$ alors X est dense dans $\mathbb{R}$

2) Appliquer ce lemme à A pour montrer que A est dense dans $\mathbb{R}$

Exercice 1 :

1) Montrer que $A = \left\{\frac{m}{n^3}, (m,n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*\right\}$ est dense dans $\mathbb{R}$
2) Montrer que $B = \{\ln r, r \in \mathbb{Q}_+^*\}$ est dense dans $\mathbb{R}$

Exercice 1 cor

1) Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x < y$.

Comme $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, on sait qu'il existe $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ tq $x \leq \frac{p}{q} \leq y$.

or $\frac{p}{q} = \frac{p \times q^2}{q^3}$

on a donc trouvé $m = pq^2 \in \mathbb{Z}$ et $n = q \in \mathbb{N}^*$ tels que

$x \leq \frac{m}{n^3} \leq y$.

Concl : A est dense dans $\mathbb{R}$

2) Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x < y$. On a alors $0 < e^x < e^y$.

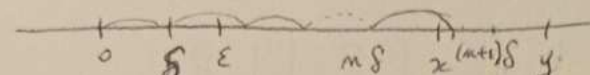
Comme $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, on sait qu'il existe $r \in \mathbb{Q}_+^*$ tel que $e^x \leq r \leq e^y$

On a alors $\ln(e^x) \leq \ln(r) \leq \ln(e^y)$, puisque ln est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Donc $x \leq \ln r \leq y$

Concl : B est dense dans $\mathbb{R}$.

Exercice 2 cor



1) • Soit $(x,y)\in \mathbb{R}^{+2}$ tq $x<y$

Montrons qu'il existe $a\in X$ tq $a\in[x,y]$

On prend $\varepsilon = y-x>0$. D'après b) il existe $\delta\in X$ tq $0<\delta<y-x$.

Posons $n=\lfloor \frac{x}{\delta}\rfloor$ alors $n\le \frac{x}{\delta}<n+1$.

càd $\delta n\le x<(n+1)\delta$.

Puisque $(n+1)\in\mathbb{N}$ et $\delta\in X$ on a d'après a) : $(n+1)\delta\in X$

Reste à montrer que $(n+1)\delta\le y$

D'une part $n\delta\le x$ et d'autre part $\delta<y-x$

donc $(n+1)\delta = n\delta+\delta < x+y-x$ donc $(n+1)\delta<y$

Conclusion : on a trouvé $a\in X$ tq $a\in[x,y]$ ($a=(n+1)\delta$).
donc X est dense dans $\mathbb{R}^+$

• On suppose maintenant que X est stable par $-$. Mq X est dense dans $\mathbb{R}$.
On sait déjà par ce qui précède que X est dense dans $\mathbb{R}^+$.
On montre que X est dense dans $\mathbb{R}^-$.

Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^{-2}$ tq $x<y$

Alors $(-x,-y)\in\mathbb{R}^{+2}$ et $-x>-y$

On peut alors affirmer d'après ce qui précède qu'il existe $a\in X$ tel que $a\in[-y,-x]$. Comme X est stable par $-$, $-a\in X$ et $-a\in[x,y]$ donc on a trouvé un élément de X dans $[x,y]$.

Ainsi X est dense dans $\mathbb{R}^+$ et dans $\mathbb{R}^-$

Montrons que X est dense dans $\mathbb{R}$.

Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ tq $x<0<y$. Comme X est dense dans $\mathbb{R}^-$, Alors il existe $a\in X$ tel que $a\in[x,0]$. Or $[x,0]\subset[x,y]$ donc il existe $a\in X$ tel que $a\in[x,y]$

Concl: X est dense dans $\mathbb{R}$.

2) • D'une part, par définition $A\subset\mathbb{R}$

• D'autre part, soit $a\in A$ et $n\in\mathbb{N}^*$, mq $n.a\in A$.

$a\in A$ donc il existe $m\in\mathbb{N}^*$ et $p\in\mathbb{N}^*$ tq $a=\sqrt{m}-\sqrt{p}$

$n.a = n(\sqrt{m}-\sqrt{p}) = n\sqrt{m}-n\sqrt{p} = \sqrt{n^2m}-\sqrt{n^2p}$ car $n=|n|=\sqrt{n^2}$

or $n^2m\in\mathbb{N}^*$ et $n^2p\in\mathbb{N}^*$ donc $n.a\in A$.

Finalement $0.a=0=\sqrt{2}-\sqrt{2}$ donc $0\in A$.

Ainsi $\forall a\in A, \forall n\in\mathbb{N}, n.a\in A$.

• Soit $n\in\mathbb{N}$ $\sqrt{n+1}-\sqrt{n} = \frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$

Donc $(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$ cv vers 0

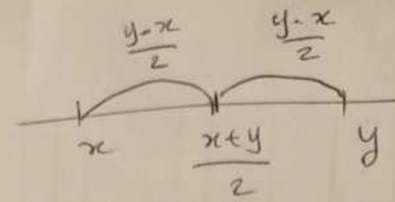
$\forall\varepsilon>0, \exists n_0\in\mathbb{N}\ \forall n\geq n_0, |\sqrt{n+1}-\sqrt{n}|\le\frac{\varepsilon}{2}$ càd $\sqrt{n_0+1}-\sqrt{n_0}\le\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$

Ainsi par ex $\sqrt{n_0+1}-\sqrt{n_0}<\varepsilon$ et $\sqrt{n_0+1}-\sqrt{n_0}\in A$

• A est stable par $-$ car si $\sqrt{m}-\sqrt{n}\in A$ alors $\sqrt{n}-\sqrt{m}\in A$

Concl: A est dense dans $\mathbb{R}$.

Exercice 3 cor



Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tq $x < y$.

Montrons qu'il existe $(m,n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tq $x \leq m - \ln(n) \leq y$.

Cela revient à montrer qu'il existe $(m,n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tq

$$-\frac{y-x}{2} \leq m - \ln(n) - \frac{x+y}{2} \leq \frac{y-x}{2}$$

càd $$\left| m - \ln(n) - \frac{x+y}{2} \right| \leq \frac{y-x}{2}$$

Pour cela, on va raisonner en 3 étapes :

1) Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} \ln(n+1) - \ln(n)$

2) Déterminer $\lim\limits_{m \to +\infty} m - \frac{x+y}{2}$

3) En revenant à la définition de ces deux limites à l'aide des quantificateurs, obtenir l'existence de m et de n souhaités.

1) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\ln(n+1) - \ln(n) = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

2) $\lim\limits_{m \to +\infty} m - \frac{+}{2} = +\infty$.

3) Comme $(\ln(n+1) - \ln(n))$ CV vers 0, il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall n \geq n_0$, $\ln(n+1) - \ln(n) \leq \frac{y-x}{2}$ (on a pris $\varepsilon = \frac{y-x}{2}$)

Comme $\lim\limits_{m \to +\infty} m - \frac{x+y}{2} = +\infty$, il existe $m_1 \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall m \geq m_1$, $m - \frac{x+y}{2} \geq \ln(n_0)$ (on a pris $A = \ln(n_0)$ on voit pourquoi ensuite : on veut trouver $n \geq n_0$ pour majorer par $\frac{y-x}{2}$)

Soit $m \in \mathbb{N}^*$ tq $m \geq m_1$

Posons maintenant $\boxed{n = \left\lfloor e^{m - \frac{x+y}{2}} \right\rfloor}$

Alors d'une part $n \leq e^{m - \frac{x+y}{2}} < n+1$

càd $\ln n \leq m - \frac{x+y}{2} < \ln(n+1)$

et d'autre part comme $m - \frac{x+y}{2} \geq \ln(n_0)$, alors $e^{m - \frac{x+y}{2}} \geq n_0$ et comme $n = \left\lfloor e^{m - \frac{x+y}{2}} \right\rfloor$ est le plus grand entier inférieur à $e^{m - \frac{x+y}{2}}$, on en déduit que $n \geq n_0$; puisque n_0 est un entier inférieur à $e^{m - \frac{x+y}{2}}$.

Ainsi $0 \leq m - \frac{x+y}{2} - \ln n \leq \underline{\ln(n+1) - \ln(n)}$

et comme $n \geq n_0$ on peut affirmer : $\underline{\ln(n+1) - \ln(n)} \leq \frac{y-x}{2}$

Ainsi on a trouvé m et n tels que : $(m,n) \in \mathbb{N}^{*2}$ et $\mathbb{N}^{*2} \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$

$|m - \ln n - \frac{x+y}{2}| \leq \frac{y-x}{2}$.

Exercice 4 cor

1). • Soit $n \in \mathbb{N}$.

$|w_{n+1} - w_n| = |u_{n+1+p} - v_q - (u_{n+p} - v_q)| = |u_{n+p+1} - u_{n+p}|$

or on sait que $(u_{n+1} - u_n)$ CV vers 0 donc

$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0,\ |u_{n+1} - u_n| \leq \varepsilon$

on prend $\varepsilon = \frac{b-a}{2}$

il existe donc $n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall \underline{N} \geq n_0$, $|u_{\underline{N}+1} - u_{\underline{N}}| \leq \frac{b-a}{2}$

Posons $p = n_0$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\underline{n+p} \geq p = n_0$ donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_{\underline{n+p}+1} - u_{\underline{n+p}}| \leq \frac{b-a}{2}$

Ainsi on a trouvé p tel que $\forall n \in \mathbb{N}$ $|w_{n+1} - w_n| \leq \frac{b-a}{2}$.

• D'autre part $w_0 = u_p - v_q$

On sait que (v_n) DV vers $+\infty$ donc $(-v_n)$ DV vers $-\infty$

donc $\forall B \in \mathbb{R}\ \exists n_1 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_1,\ -v_n \leq B$

ici on prend $B = a - u_p$

Il existe donc $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_1, -v_n \leq a - u_p$

Ainsi $\forall n \geq n_1$, $u_p - v_n \leq u_p + a - u_p = a$

Posons $q = n_1$. On a donc $u_p - v_q = w_0 \leq a$.

3) Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tq $a < b$.

Montrons qu'il existe $(\ ,\ ) \in \mathbb{N}^2$ tq $u - v \in [a,b]$.

D'après 1) il existe $(p,q) \in \mathbb{N}^2$ tq $(w_n) = (u_{n+p} - v_q)$ vérifie :

$w_0 \leq a$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $|w_{n+1} - w_n| \leq \frac{b-a}{2}$.

D'après la question 2), on sait qu'il existe

$N \in \mathbb{N}$ tel que $w_N \leq a$ et $w_{N+1} > a$

Ainsi, puisque $w_{N+1} - w_N \leq |w_{N+1} - w_N|$,

on a $a < w_{N+1} \leq \underbrace{w_N}_{\leq a} + \underbrace{|w_{N+1} - w_N|}_{\leq \frac{b-a}{2}} \leq a + \frac{b-a}{2} = \frac{2a+b-a}{2} = \frac{a+b}{2} \underset{a<b}{<} b$

donc $w_{N+1} \in]a,b[$ càd $u_{N+1+p} - v_q \in]a,b[$ donc $u_{N+1+p} - v_q \in [a,b]$

il suffit donc de prendre $r = N+1+p$ et $s = q$.
Concl : B est dense dans $\mathbb{R}$.

2) On sait que (u_n) DV vers $+\infty$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $w_n = u_{n+p} - v_q$ donc par somme, (w_n) DV vers $+\infty$

Ainsi il existe $n_2 \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq n_2$, $w_n \geq a+1 > a$.

Soit $A = \{n \in \mathbb{N},\ w_n \leq a\}$.

$A \subset \mathbb{N}$, A est non vide car $w_0 \leq a$ donc $0 \in A$

et A est majoré par n_2 puisque $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_2 \Rightarrow w_n > a$,

par contraposée, $\forall n \in \mathbb{N}$ $w_n \leq a \Rightarrow n < n_2$.

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \in A \Rightarrow n < n_2$.

Comme A est une partie non vide et majorée de $\mathbb{N}$, A admet un plus grand élément que l'on note N

Ainsi $N \in A$ et $N+1 \notin A$

Donc $w_N \leq a$ et $w_{N+1} > a$.