Ex 4 TD12

① • $(1+i)\mathbb{R}$ est une partie non vide de $\mathbb{C}$

• Soit $z \in (1+i)\mathbb{R}$ et $z' \in (1+i)\mathbb{R}$. Mq $z+(-z') \in (1+i)\mathbb{R}$

il existe $a \in \mathbb{R}$ tq $z=(1+i)a$
il existe $a' \in \mathbb{R}$ tq $z'=(1+i)a'$ } alors $z+(-z') = (1+i)a+(-(1+i)a')$

$z+(-z') = (1+i)a-(1+i)a' = (1+i)(a-a') = (1+i)a''$ en posant $a''=a-a'$

ainsi $a'' \in \mathbb{R}$ et $z+(-z') \in (1+i)\mathbb{R}$

• Concl : $((1+i)\mathbb{R},+)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{C},+)$ donc c'est un groupe

② $0 \in (1+i)\mathbb{R}$ car $0=(1+i)\times 0$

or 0 n'a pas d'inverse pour $\times$ dans $\mathbb{C}$

donc $((1+i)\mathbb{R},\times)$ n'est pas un groupe

NB : on pouvait aussi dire que $\times$ n'est pas une LCI dans $(1+i)\mathbb{R}$.
En effet, $(1+i)1 \times (1+i)1 = (1+i)^2 = 2i$ et $2i \notin (1+i)\mathbb{R}$

NB2 : on pouvait aussi dire que le neutre pour $\times$, 1, n'appartient pas à $(1+i)\mathbb{R}$

③ On a montré en cours que $(\mathbb{U},\times)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*,\times)$
donc c'est un groupe.

Mq $(R_\Omega,\circ)$ est un sous-groupe du groupe des bijections du plan.

• R_Ω est une partie non vide du gpe des bij du plan
(par ex id est une rotation de centre Ω et d'angle 0 ou 2π)

• Soient r et r' 2 rotations du plan de centre commun Ω et d'angles respectif $\theta \in \mathbb{R}$ et $\theta' \in \mathbb{R}$. Mq $r\circ r'^{-1}$ est une rotation du plan de centre Ω

Soit M un point qcque du plan. On note $M_1 = r'^{-1}(M)$ et $M_2 = r(M_1)$

on a $\begin{cases} \Omega M_1 = \Omega M_2 \\ (\overrightarrow{\Omega M_1},\overrightarrow{\Omega M_2}) \equiv \theta\ [2\pi] \end{cases}$ et $\begin{cases} \Omega M = \Omega M_1 \\ (\overrightarrow{\Omega M},\overrightarrow{\Omega M_1}) \equiv -\theta'\ [2\pi] \end{cases}$

Ainsi $\begin{cases} \Omega M = \Omega M_2 \\ (\overrightarrow{\Omega M},\overrightarrow{\Omega M_2}) = (\overrightarrow{\Omega M},\overrightarrow{\Omega M_1})+(\overrightarrow{\Omega M_1},\overrightarrow{\Omega M_2}) \equiv -\theta'+\theta\ [2\pi] \end{cases}$

rel de Chasles pour les angles de vecteurs

Donc $r\circ r'^{-1}$ est une rotation de centre Ω et d'angle $\theta-\theta'$
donc $r\circ r'^{-1} \in R_\Omega$ et Concl : $(R_\Omega,\circ)$ est un sous-groupe du groupe des bijections du plan donc c'est un groupe.

• Mq $\varphi : R_\Omega \to \mathbb{U}$, $r \mapsto e^{i\theta}$, où θ est une mesure de l'angle de r, est un morphisme

$\forall (r,r') \in R_\Omega^2$, $\varphi(r\circ r') = e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta}e^{i\theta'} = \varphi(r)\times\varphi(r')$, où θ est une mesure de l'angle de r et θ' une mesure de l'angle de r'

Donc φ est un morphisme de groupes.

<u>Mq ϕ est bijective</u>

- $\forall z \in \mathbb{U}, \exists \theta \in \mathbb{R}, z = e^{i\theta}$ donc $z = \phi(r)$ où r est la rotation de centre Ω et d'angle θ

  Ainsi on a mq $\forall z \in \mathbb{U}, \exists r \in R_\Omega$ tq $z = \phi(r)$

  donc ϕ est surjective

- Soient $r \in R_\Omega$ d'angle θ et $r' \in R_\Omega$ d'angle θ'.

  Supposons $\phi(r) = \phi(r')$ alors $e^{i\theta} = e^{i\theta'} \Rightarrow \theta \equiv \theta' \, [2\pi]$

  Donc r et r' ont même angle modulo 2π et même centre

  Donc $r = r'$

  Donc ϕ est injective

Ainsi ϕ est un isomorphisme de groupes de $(R_\Omega, \circ)$ sur $(\mathbb{U}, \times)$ et ces 2 groupes sont donc isomorphes

<u>Csqce pratique :</u> cet isomorphisme est utile pour remplacer un travail de nature géométrique en un travail de nature algébrique.

TD 12 cor

Ex 11 :

Soit $n \in \mathbb{N}$ $\quad 3^{2n+1} + 2^{4n+2} = 3^{2n+1} + 4^{2n+1}$

$$= (3+4) \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k 3^k 4^{2n-k}$$

$$= 7c \quad \text{où } c = \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k 3^k 4^{2n-k} \in \mathbb{Z}$$

Deuxième méthode :

$$3^{2n+1} = (7-4)^{2n+1} = \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} 7^k (-4)^{2n+1-k}$$

$$= (-4)^{2n+1} + \sum_{k=1}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} 7^k (-4)^{2n+1-k}$$

$$= (-4)^{2n+1} + 7 \underbrace{\sum_{k=1}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} 7^{k-1} (-4)^{2n+1-k}}_{D}$$

$$3^{2n+1} - (-4)^{2n+1} = 7D$$

$$3^{2n+1} - (-4^{2n+1}) = 7D$$

$$3^{2n+1} + 4^{2n+1} = 7D$$

Ex 10 ① Soit a, b, c, d 4 éléments de A

$\times$ est commutative dans A et assoc

$$(ac-bd)^2 + (ad+bc)^2 = (ac)^2 - 2acbd + (bd)^2 + (ad)^2 + 2adbc + (bc)^2$$

$$= a^2c^2 - \cancel{2abcd} + b^2d^2 + a^2d^2 + \cancel{2abcd} + b^2c^2$$

$$= (a^2+b^2)(c^2+d^2)$$

$\times$ distributive par rapport à $+$ et $+$ est associative et commutative

② $962 = 13 \times 74$

$$= (9+4)(49+25)$$

$$= (3^2+2^2)(7^2+5^2)$$

$$= (21-10)^2 + (15+14)^2$$

$$= 11^2 + 29^2$$

Ex 13

① Soit f un morphisme du groupe $(E,*)$ vers le groupe $(F,\perp)$
Soit g un morphisme du groupe $(F,\perp)$ vers le groupe (G,∇).

Mq $g\circ f$ est un morphisme du groupe $(E,*)$ vers le groupe (G,∇).

Soit $(a,b)\in E^2$,

$$g\circ f(a*b) = \underbrace{g(f(a*b)) = g(f(a)\perp f(b))}_{f \text{ est un morphisme}} = \underbrace{g(f(a))\nabla g(f(b))}_{g \text{ est un morphisme}}$$

en posant $A=f(a)\in F$
$B=f(b)\in F$
$g(A\perp B)=g(A)\nabla g(B)$

donc $g\circ f(a*b) = g\circ f(a)\ \nabla\ g\circ f(b)$

donc $g\circ f$ est un morphisme

② Soit f un isomorphisme du groupe $(E,*)$ vers le groupe $(F,\perp)$
f est donc un morphisme bijectif. Soit f^{-1} l'appl réc de f
Mq f^{-1} est un morphisme (on sait déjà que f^{-1} est bijective).

Soient y_1 et y_2 2 élts de F. On veut mq :

$$f^{-1}(y_1\perp y_2) = f^{-1}(y_1) * f^{-1}(y_2).$$

D'une part, $f(f^{-1}(y_1\perp y_2)) = y_1\perp y_2$

D'autre part, $f(f^{-1}(y_1) * f^{-1}(y_2)) = f(f^{-1}(y_1))\perp f(f^{-1}(y_2))$ (f est un morphisme en posant $Y_1=f^{-1}(y_1)$, $Y_2=f^{-1}(y_2)$)

$$= y_1\perp y_2$$

Donc $f(f^{-1}(y_1\perp y_2)) = f(f^{-1}(y_1) * f^{-1}(y_2))$

Donc $f^{-1}(y_1\perp y_2) = f^{-1}(y_1) * f^{-1}(y_2)$ car f est bij donc inj.

Ainsi f^{-1} est un isomorphisme du groupe $(F,\perp)$ vers le groupe $(E,*)$.

Ex 14 Rq loi bien définie sur E car $|xy| < 1$ donc $1+xy > 0$.

$-1 < x*y < 1$

$]-1, 1[$

1- $(E, *)$ est 1 gpe commutatif car

- $*$ est 1 LCI

$\forall (x,y) \in E^2, \quad x*y \in E. \iff \begin{cases} 1 - x*y > 0 \\ 1 + x*y > 0. \end{cases}$

$-1 < x < 1$
$-1 < y < 1$
$-1 < xy < 1$

$$1 - x*y = \frac{1+xy-x-y}{1+xy} = \frac{(1-x)(1-y)}{1+xy} > 0$$

$$1 + x*y = \frac{1+xy+x+y}{1+xy} = \frac{(1+x)(1+y)}{1+xy} > 0.$$

- $*$ est commutative
- $*$ assoc $\forall (x,y,z) \in E^2$

$$(x*y)*z = \frac{x+y}{1+xy} * z = \frac{\frac{x+y}{1+xy} + z}{1 + \frac{x+y}{1+xy} z} = \frac{x+y+z+xyz}{1+xy+xz+yz}$$

$$x*(y*z) = x * \frac{y+z}{1+yz} = \frac{x + \frac{y+z}{1+yz}}{1 + x\frac{y+z}{1+yz}} = \frac{x+xyz+y+z}{1+yz+xy+xz}$$

- $*$ a 1 élt neutre 0 dans E

$$x*0 = \frac{x+0}{1+x.0} = x = 0*x$$

- $\forall x \in E$, x a 1 sym pour $*$ dans E: $-x \in E$.

$$x*(-x) = \frac{x+(-x)}{1-x^2} = \frac{0}{1-x^2} = 0.$$

2. il suffit de mq ϕ est 1 morp bijectif de E dans $\mathbb{R}$.
ϕ est bien définie sur E car si $x \in E$, $|x| < 1$ $1+x > 0$ et $1-x > 0$
$\forall (x,y) \in E^2$, mq $\phi(x*y) = \phi(x) + \phi(y)$.

$$\phi(x*y) = \ln\left(\frac{1 + \frac{x+y}{1+xy}}{1 - \frac{x+y}{1+xy}}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{1+xy+x+y}{1+xy-x-y}\right) = \ln\left(\frac{(1+x)(1+y)}{(1-x)(1-y)}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + \ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right) = \phi(x) + \phi(y)$$

ϕ est 1 morp de gpes de $(E, *)$ dans $(\mathbb{R}, +)$.

Reste à mq ϕ est 1 bijection de $]-1,1[$ dans $\mathbb{R}$.

ϕ est dérivable sur $]-1,1[$ et

d'1 part $\phi'(x) = \dfrac{1}{\frac{1+x}{1-x}} \cdot \dfrac{1-x+(1+x)}{(1-x)^2} = \dfrac{1-x}{1+x} \dfrac{2}{(1-x)^2}$

$= \dfrac{2}{(1+x)(1-x)} = \dfrac{2}{1-x^2} > 0 \quad \forall x \in]-1;1[$

ϕ est strict croissante sur $]-1,1[$ et continue sur $]-1,1[$

D'après le théorème de la bijection,

Elle définit 1 bijectⁿ de $]-1,1[$ sur $\varphi(]-1,1[) =]\lim_{x\to -1^+} \varphi(x), \lim_{z\to 1^-} \varphi(z)[$

$= \mathbb{R}$.

Ex 15 TD12

① Voir exercice 5-1

② Soit $(x,y) \in G^2$

$\varphi_a(x)\varphi_a(y) = (axa^{-1})(aya^{-1})$
$= ax(a^{-1}a)ya^{-1} = axya^{-1} = \varphi_a(xy)$

Donc φ_a est un morphisme du groupe $(G,\cdot)$ vers lui-même. C'est donc un endomorphisme.

Mq φ_a est bijective.

Soit $y \in G$ mq l'équation $\varphi_a(x)=y$ admet une unique solution dans G.

$\varphi_a(x)=y \Rightarrow axa^{-1}=y \Rightarrow a^{-1}(axa^{-1})a = a^{-1}ya \Rightarrow (a^{-1}a)x(a^{-1}a)=a^{-1}ya$
$\Rightarrow x = a^{-1}ya$.

Réciproquement $\varphi_a(a^{-1}ya) = a(a^{-1}ya)a^{-1} = y$ donc on peut affirmer que $\varphi_a(x)=y \Leftrightarrow x = a^{-1}ya$.

Donc $\forall y \in G\ \exists! x \in G$ tq $\varphi_a(x)=y$

Donc φ_a est une bijection de G sur G.

φ_a est un automorphisme du groupe $(G,\cdot)$.

③ en fait $B(G) = S_G$ (notations du cours)

Soit $(a,b) \in G^2$ et $x \in G$

$\varphi_a \circ \varphi_b(x) = \varphi_a(bxb^{-1}) = a(bxb^{-1})a^{-1}$
$= (ab)x(b^{-1}a^{-1}) = (ab)x(ab)^{-1} = \varphi_{ab}(x)$

Ce qui prouve que $\varphi_a \circ \varphi_b = \varphi_{ab}$ soit $\theta(a)\circ\theta(b) = \theta(ab)$

θ est un morphisme de groupes de $(G,\cdot)$ dans $(B(G),\circ)$.

L'élément neutre du groupe $(B(G),\circ)$ est id_G

et $\mathrm{Ker}(\theta) = \{a \in G \,/\, \theta(a) = id_G\}$

$a \in \mathrm{Ker}(\theta)$ ssi $\theta(a) = id_G \Leftrightarrow \varphi_a = id_G$

ssi $\forall x \in G,\ axa^{-1} = x$. Mq $\mathrm{Ker}(\theta) = \mathcal{C}$

Si $a \in \mathrm{Ker}\,\theta$ $\forall x \in G$ $(axa^{-1})a = xa \Rightarrow ax(a^{-1}a) = xa$
$\Rightarrow ax = xa$.

alors $a \in \mathcal{C}$ donc $\mathrm{Ker}\,\theta \subset \mathcal{C}$.

Réciproquement si $a \in \mathcal{C}$, $\forall x \in G$ $\varphi_a(x) = (ax)a^{-1} = (xa)a^{-1} = x$

Donc $\varphi_a = id_G$ et $a \in \mathrm{Ker}\,\theta$ donc $\mathcal{C} \subset \mathrm{Ker}\,\theta$

Concl: $\mathrm{Ker}\,\theta = \mathcal{C}$