Ex 1 TD 11

Soit x le 1er terme de la suite

La somme des n 1ers termes est :

$(x) + (x+2) + \dots + (x + 2(n-1)) = 7^3$

càd $nx + 2(1 + \dots + n-1) = 7^3$, soit $nx + 2\frac{(n-1)(n)}{2} = 7^3$

donc $n(x + n - 1) = 7^3$

Donc $n \mid 7^3$ donc $n \in \{1, 7, 7^2, 7^3\}$

- si $n = 1$, $x = 343$
- si $n = 7$, $x = 43$. Les termes sont $\{43, 45, \dots, 55\}$
- si $n = 49$, $x = -41$. les termes sont $\{-41, -39, \dots, 55\}$
- si $n = 343$, $x = -341$ et les termes sont $\{-341, -339, \dots, 343\}$

Ex 2 TD 11

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}$

$\lfloor kx \rfloor \leq kx < \lfloor kx \rfloor + 1$

d'où $kx - 1 < \lfloor kx \rfloor \leq kx$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ $\quad \sum_{k=1}^{n} (kx - 1) < \sum_{k=1}^{n} \lfloor kx \rfloor \leq \sum_{k=1}^{n} kx$

$$x \frac{n(n+1)}{2} - n < \sum_{k=1}^{n} \lfloor kx \rfloor \leq x \frac{n(n+1)}{2}$$

Soit u_n le terme général de la suite étudiée. On a :

$$\frac{x(n+1)}{2n} - \frac{1}{n} < u_n \leq \frac{x(n+1)}{2n}$$

Par le th des gendarmes, u CV vers $\frac{x}{2}$, puisque

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{x(n+1)}{2n} - \frac{1}{n} = \lim_{n \to +\infty} \frac{x(n+1)}{2n} = \frac{x}{2}.$$

Exercice 3 TD 11

- $f : x \mapsto x + \ln(e-x)$ est déf et dér sur $]-\infty, e[$

  $\forall x \in]-\infty, e[$, $f'(x) = \dfrac{e-1-x}{e-x}$

x	$-\infty$		$e-1$		e
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$e-1$	$\searrow$	$-\infty$

$\lim_{x \to e} x + \ln(e-x) = -\infty$

$\lim_{x \to -\infty} x + \ln(e-x) = \lim_{x \to -\infty} e + x - e + \ln(e-x) = \lim_{x \to -\infty} e + (x-e)\left(1 - \frac{\ln(e-x)}{e-x}\right)$

$= -\infty$ car $\lim_{X \to +\infty} \frac{\ln X}{X} = 0$

$]-\infty, e-1]$ est stable par f et $u_0 = 1 \in]-\infty, e-1]$

donc (u_n) est bien définie.

- De plus f est croissante sur $]-\infty, e-1]$ et $u_1 = 1 + \ln(e-1) > 1 = u_0$

  donc on peut montrer par récurrence que (u_n) est croissante (le faire)

- Ainsi (u_n) est croissante et majorée par $e-1$ (le montrer par réc) donc par le th de la limite monotone, (u_n) cv. Soit ℓ sa limite.

  Comme $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} = u_n + \ln(e - u_n)$, par passage à la limite

  $$\ell = f(\ell)$$

  Résolvons $\ell = f(\ell)$ sur $]-\infty, e-1]$

  $\ell = f(\ell)$ ssi $\ell = \ell + \ln(e-\ell)$ ssi $0 = \ln(e-\ell)$ ssi $1 = e - \ell$ ssi $\ell = e-1$

  <u>Concl</u> : (u_n) cv vers $e-1$.

Ex 5

1 - ε et M sont fixés
$u_M, u_{M+1}, \dots$ sont tous dans $[l-\varepsilon, l+\varepsilon]$
donc u est bornée

2 - u cv vers l

3 - u est constante à partir du rang M

4 - pas de sens
en effet on impose une condition sur n avec M
avant d'établir l'existence de M

5 - la proposition est toujours vraie (pas de contrainte sur u),
quelque soit la suite u.
il suffit de prendre $M = n+1$ et alors l'implication est toujours vraie
puisque $n \geqslant n+1$ est fausse; ceci enlève la condition sur u_n.

Ex 8 TD 11

Soit $n \geq 1$

$$u_{2n+2} - u_{2n} = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} = \frac{2n+2-2n-1}{(2n+1)(2n+2)} > 0$$

$$u_{2n+3} - u_{2n+1} = \frac{-1}{2n+2} + \frac{1}{2n+3} = \frac{-2n-3+2n+2}{(2n+2)(2n+3)} < 0$$

Donc (u_{2n}) est croiss et (u_{2n+1}) est décroissante

De plus $\forall n \geq 1$, $u_{2n+1} - u_{2n} = \frac{1}{2n+1} > 0$ donc $u_{2n+1} > u_{2n}$

et $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{2n+1} = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_{2n+1} - u_{2n} = 0$.

Concl : (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont adjacentes

Donc u CV vers la limite commune de (u_{2n}) et (u_{2n+1}) par le th des suites adjacentes

Exercice 12 TD11

1) (u_n) est une suite croissante donc si on pose $n \in \mathbb{N}$, on a :
$\forall k \in [\![0,n]\!],\ u_k \leq u_n$ d'où $\sum_{k=0}^{n} u_k \leq \sum_{k=0}^{n} u_n = (n+1)u_n$
Ainsi $v_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u_k \leq \frac{n+1}{n+1} u_n = u_n$
On a mq $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n \leq u_n$

2) Soit $n \in \mathbb{N}$ Soit $p \in \mathbb{N}$ tq $p > n$.

$$v_p = \frac{1}{p+1}\left(\sum_{k=0}^{n-1} u_k\right) + \frac{1}{p+1}\left(\sum_{k=n}^{p} u_k\right)$$ par la relation de Chasles

$$\geq \frac{1}{p+1}\left(\sum_{k=0}^{n-1} u_k\right) + \frac{1}{p+1}\left(\sum_{k=n}^{p} u_n\right)$$ car $\forall k \geq n,\ u_k \geq u_n$ (u est croissante)

$$= \frac{1}{p+1}\left(\sum_{k=0}^{n-1} u_k\right) + \frac{p-n+1}{p+1} u_n$$

3) On suppose que v converge vers l. On fixe $n \in \mathbb{N}$
Par passage à la limite lorsque p tend vers $+\infty$ l'inégalité de la question 2) devient : $l \geq u_n$
puisque $\lim_{p\to+\infty} \frac{1}{p+1}\left(\sum_{k=0}^{n-1} u_k\right) = \left(\sum_{k=0}^{n-1} u_k\right) \lim_{p\to+\infty} \frac{1}{p+1} = 0$

et $\lim_{p\to+\infty} \frac{p-n+1}{p+1} u_n = u_n \times \lim_{p\to+\infty} \frac{\cancel{p}\left(1-\frac{n}{p}+\frac{1}{p}\right)}{\cancel{p}\left(1+\frac{1}{p}\right)} = u_n$

dans la mesure où $\sum_{k=0}^{n-1} u_k$ et u_n sont indépendantes de p.
Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}\ \ l \geq u_n$ et u est majorée par l
Comme on sait que u est croissante, on obtient donc, par le théorème de la limite monotone, que u CV.
Soit $l' = \lim u$. On a par passage à la limite dans : $\forall n \in \mathbb{N}\ \ l \geq u_n$, que $l \geq l'$.
Or d'après q 1 : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n \leq u_n$ donc par passage à la limite lorsque n tend vers $+\infty$, on obtient que $l \leq l'$

Ainsi $\left.\begin{array}{l} l \leq l' \\ l \geq l' \end{array}\right\} \Rightarrow l = l'$ et u CV vers l

Ex 14 TD 11

$\ell < \ell'$

Posons $m = \dfrac{\ell+\ell'}{2}$

On a u CV vers $\ell < m$

Pour $\varepsilon = m-\ell > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geqslant n_0$, $|u_n - \ell| < \varepsilon$

$\forall n \geqslant n_0 \quad -\varepsilon < u_n - \ell < \varepsilon$

$\forall n \geqslant n_0 \quad \ell - \varepsilon < u_n < \varepsilon + \ell$

$\forall n \geqslant n_0 \quad u_n < m$

On a v CV vers $\ell' > m$

Pour $\varepsilon' = \ell' - m > 0$, il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geqslant n_1$, $|v_n - \ell'| < \varepsilon'$

$\forall n \geqslant n_1, \quad -\varepsilon' < v_n - \ell' < \varepsilon'$

$\forall n \geqslant n_1 \quad -\varepsilon' + \ell' < v_n < \varepsilon' + \ell'$

or $m = \ell' - \varepsilon'$

donc pour $n \geqslant \max(n_0, n_1)$, $u_n < m < v_n$.

Exercice 15 TD11 0) voir : 2) avec $l=0$.

1) si $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$, on ne peut rien conclure sur la limite de u.

En effet, u peut DV vers $+\infty$ (prendre $\forall n\in\mathbb{N}^*\ u_n=n$)

u peut CV vers 0 (prendre $\forall n\in\mathbb{N}^*\ u_n=\frac{1}{n}$)

u peut CV par ex vers 2 (prendre $\forall n\in\mathbb{N}^*\ u_n=2-\frac{1}{n^2}$)

2) supposons que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$ avec $0\le l<1$. Mq (u_n) CV vers

Comme $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$, il existe $n_0\in\mathbb{N}$ tq

$\forall n\in\mathbb{N},\ n\geq n_0 \Rightarrow \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}-l\right|\leq\frac{1-l}{2}$

$\forall n\in\mathbb{N},\ n\geq n_0 \Rightarrow \frac{l-1}{2}\leq\frac{u_{n+1}}{u_n}-l\leq\frac{1-l}{2}$

$\forall n\in\mathbb{N},\ n\geq n_0 \Rightarrow \frac{3l-1}{2}\leq\frac{u_{n+1}}{u_n}\leq\frac{1+l}{2}$) $u_n>0$

$\forall n\in\mathbb{N},\ n\geq n_0 \Rightarrow u_{n+1}\leq\left(\frac{l+1}{2}\right)u_n$

On a donc, $\forall n\in\mathbb{N},\ n\geq n_0 \Rightarrow u_n\leq\left(\frac{l+1}{2}\right)^{n-n_0}u_{n_0}$.

or $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n>0$

Donc $\forall n\in\mathbb{N},\ n\geq n_0 \Rightarrow 0<u_n\leq\left(\frac{l+1}{2}\right)^{n-n_0}u_{n_0}$.

Par le th des gendarmes, comme $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{l+1}{2}\right)^{n-n_0}u_{n_0}=0$,

puisque $\frac{1}{2}\leq\frac{l+1}{2}<1$, on peut dire que

(u_n) CV vers 0.

3) supposons que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$ avec $l>1$. Mq (u_n) DV vers $+\infty$.

Il existe $n_0\in\mathbb{N}$ tq $\forall n\in\mathbb{N},\ n\geq n_0 \Rightarrow \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}-l\right|\leq\frac{l-1}{2}$

$\forall n\in\mathbb{N},\ n\geq n_0 \Rightarrow \frac{1-l}{2}\leq\frac{u_{n+1}}{u_n}+l\leq\frac{l-1}{2}$

$\forall n\in\mathbb{N},\ n\geq n_0 \Rightarrow \frac{1+l}{2}\leq\frac{u_{n+1}}{u_n}$) $u_n>0$

$\forall n\in\mathbb{N},\ n\geq n_0 \Rightarrow u_{n+1}\geq\frac{1+l}{2}u_n$

$\forall n\in\mathbb{N},\ n\geq n_0 \Rightarrow u_n\geq\left(\frac{1+l}{2}\right)^{n-n_0}\times u_{n_0}$ or $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1+l}{2}\right)^{n-n_0}\times u_{n_0}=+\infty$

car $u_{n_0}>0$ et $\frac{1+l}{2}>1$ donc par th de minoration, u DV vers $+\infty$

Ex 16 TD11

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $H_{2n} - H_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$

or $\forall k \in [\![n+1, 2n]\!]$, $0 < k \leqslant 2n$ donc $\frac{1}{k} \geqslant \frac{1}{2n}$

ainsi $\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2n} \left[2n - (n+1) + 1 \right] = \frac{1}{2n} \times n = \frac{1}{2}$

Donc $H_{2n} - H_n \geqslant \frac{1}{2}$

2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ $H_{n+1} - H_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$

$H_{n+1} - H_n = \frac{1}{n+1} > 0$ donc $H_{n+1} > H_n$

On en déduit que (H_n) est croissante.

D'après le th de la limite monotone, soit (H_n) CV, soit (H_n) DV vers $+\infty$.

Supposons que (H_n) CV. Notons l sa limite.

Puisque (H_n) CV alors par unicité de la limite (H_{2n}) CV vers l et donc, puisque d'après q1 $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $H_{2n} - H_n \geqslant \frac{1}{2}$ on a, par passage à la limite : $l - l \geqslant \frac{1}{2}$ càd $0 \geqslant \frac{1}{2}$ absurde !

Donc (H_n) DV vers $+\infty$.

Ex 19 TD 11

Par l'absurde, on suppose $(\cos(n))$ CV vers $l \in \mathbb{R}$. On sait que $\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$ pour tout $(p,q) \in \mathbb{R}^2$. Soit $n \in \mathbb{N}$, $\cos(n+1) + \cos(n-1) = 2\cos n \cos 1$. Par passage à la limite on a donc $2l = 2l\cos 1$ donc $l = 0$.

Mais $\cos(2n) = 2\cos^2 n - 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$

Par passage à la limite $0 = 2 \times 0^2 - 1$ donc $0 = -1$ absurde.