Les documents, calculatrices et téléphones portables sont interdits. La clarté et la précision de la rédaction seront prises en compte dans la notation. Les trois exercices sont indépendants.

Exercice 1

1. Donner l'ensemble de définition, l'ensemble de dérivabilité et la dérivée de arccos. Simplifier $\cos(\arccos(x))$, $\sin(\arccos(x))$ et $\cos(\arctan(x))$ en précisant à quel intervalle appartient x.
2. On souhaite déterminer l'unique fonction $y \ : \ \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}$ qui vérifie l'équation
   $(E_1) \ : \ y''(x) - 4y'(x) + 4y(x) = \dfrac{e^{2x}}{x^2}$ avec $y(1) = 1$ et $y'(1) = 0$.
   (a) Justifier l'existence et l'unicité d'une telle fonction.
   (b) On pose pour tout $x > 0$, $y(x) = e^{2x}z(x)$. Montrer que y est solution de (E_1) sur $\mathbb{R}^{+*}$ si et seulement si z est solution d'une équation différentielle (E_2) à déterminer.
   (c) Résoudre (E_2) puis (E_1) et conclure.
3. On note $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2}, \ (a, b) \in \mathbb{Q}^2\}$.
   (a) Montrer que $(\mathbb{Q}[\sqrt{2}], +, \times)$ est un sous-anneau commutatif de $(\mathbb{R}, +, \times)$.
   (b) Soient a et b deux éléments de $\mathbb{Q}$. Montrer que $a + b\sqrt{2} = 0$ si et seulement si $a = b = 0$.
   (c) Déterminer l'ensemble des éléments non nuls de $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ qui sont inversibles. Que peut-on en déduire ?

Exercice 2

Les deux questions de cet exercice sont indépendantes.

1. Suites définies par une relation de récurrence
   (a) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.
   On considère les suites (u_n) vérifiant la relation :
   $$(1) \quad \forall n \in \mathbb{N}, \ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{2}.$$
   On suppose que $u_0 = \alpha$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer u_n en fonction de n et discuter de la convergence de la suite (u_n).
   (b) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}$.
   On considère les suites (u_n) vérifiant la relation :
   $$(2) \quad \forall n \in \mathbb{N}, \ u_{n+2} = \frac{1}{2}u_{n+1} + \frac{1}{2}u_n.$$
   On suppose que $u_0 = \alpha$ et que $u_1 = \beta$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer u_n en fonction de n et discuter de la convergence de la suite (u_n).
   (c) Soit $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que $a \leq 1$ et $b \leq 1$.
   On considère les suites (u_n) vérifiant la relation :
   $$(3) \quad \forall n \in \mathbb{N}, \ u_{n+2} = \frac{1}{2}u_{n+1} + \frac{1}{2}\min(u_n, 1).$$
   On suppose que $u_0 = a$ et que $u_1 = b$.
   i. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, \ u_n \leq 1$.
   ii. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n en fonction de n et discuter de la convergence de la suite (u_n).
2. Etude d'un produit.
   Soit (u_n) une suite de réels non nuls, on lui associe la suite (p_n) définie par :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ p_n = \prod_{p=1}^{n} u_p = u_1 u_2 \cdots u_n.$$
   On dit que le produit (p_n) converge si et seulement si la suite (p_n) admet une limite finie **non nulle**. Sinon on dit que le produit (p_n) diverge.

(a) i. En considérant le quotient $\dfrac{p_{n+1}}{p_n}$, montrer que, pour que le produit (p_n) converge, il est nécessaire que la suite (u_n) converge vers 1.

ii. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p_n = \displaystyle\prod_{p=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{p}\right)$. Obtenir une expression plus simple de p_n. Quelle est la nature du produit (p_n) ?

iii. Soient un réel a différent de $k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ et $p_n = \displaystyle\prod_{p=1}^{n} \cos\left(\frac{a}{2^p}\right)$. Pour tout entier naturel n non nul, calculer $p_n \sin\left(\dfrac{a}{2^n}\right)$. En déduire que le produit (p_n) converge et donner la limite de la suite (p_n).

(b) Soit (p_n) un produit associé à une suite (u_n) qui converge vers 1.

i. Montrer qu'il existe un entier n_0 tel que $\forall n \geq n_0,\ u_n > 0$.

ii. On pose $S_n = \displaystyle\sum_{p=n_0}^{n} \ln(u_p)$. Montrer que la convergence de la suite (S_n) équivaut à la convergence du produit (p_n).

iii. Lorsque (S_n) converge vers ℓ, donner la limite de la suite (p_n) en fonction de ℓ.

(c) Soit $p_n = \displaystyle\prod_{p=1}^{n} p^{\frac{1}{p}}$ et soit $S_n = \displaystyle\sum_{p=1}^{n} \frac{\ln p}{p}$.

i. Montrer que : $\forall p \geq 3,\ \displaystyle\int_p^{p+1} \frac{\ln x}{x} \mathrm{d}x \leq \frac{\ln p}{p}$.

ii. En déduire la nature de la suite (S_n) et du produit (p_n).

Exercice 3

Un élément x d'un groupe $(G, *)$, de neutre e, est dit d'ordre fini si et seulement s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $x^n = e$ (on rappelle que $x^n = x * x * \cdots * x$ est l'itéré n-ième de x pour $*$). Si x est d'ordre fini, le plus petit entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $x^n = e$ est appelé l'ordre de x.

1. Un exemple
   (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Donner la définition du groupe des permutations de $[[1, n]]$ et donner son nombre d'éléments.
   (b) On s'intéresse à S_4, groupe des permutations de $[[1, 4]]$, muni de la loi o. Montrer que $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ est un élément d'ordre fini de (S_4, o) et montrer que son ordre est égal à 2.
   (c) Déterminer un élément d'ordre fini de $(S_4, \circ)$ d'ordre 3.
2. Un deuxième exemple
   Pour tout $(a, b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$, on considère la fonction $f_{a,b} \ : \ \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par
   $$f_{a,b}(z) = az + b.$$
   On note $G = \{f_{a,b},\ a \in \mathbb{C}^*,\ b \in \mathbb{C}\}$.
   (a) Soit $f_{a,b}$ et $f_{a',b'}$ deux éléments de G, a et a' étant des nombres complexes non nuls et b et b' étant des nombres complexes. Montrer que $f_{a,b} \circ f_{a',b'} = f_{aa',ab'+b}$ et que $f_{a,b} \circ f_{1,0} = f_{a,b}$.
   (b) Reconnaître géométriquement la transformation plane dont l'écriture complexe est définie par $f_{-2-2i,4}$.
   (c) Quelle fonction $f_{a,b}$ définit l'écriture complexe de la translation de vecteur d'affixe 3 ? la rotation d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$ et de centre A d'affixe $1 - 2i$? On précisera a et b dans chacun des deux cas.
   (d) Montrer que l'ensemble G, muni de la composition des applications, est un groupe.
   (e) Déterminer pour $n \in \mathbb{N}^*$ l'itéré n-ième de $f_{a,b}$ pour o, où $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$.
   (f) Déterminer les éléments d'ordre fini de ce groupe.
3. Sous-groupe des éléments d'ordre fini d'un groupe commutatif
   On revient au cas général et on suppose maintenant que $(G, *)$ est un groupe commutatif.
   On pose $B = \{a \in G,\ a \text{ est d'ordre fini}\}$. Montrer que $(B, *)$ est un sous-groupe de $(G, *)$.
4. Quelques propriétés des éléments d'ordre fini d'un groupe quelconque
   Soit $(G, *)$ un groupe. On ne suppose plus dans cette question que $(G, *)$ est commutatif. Soit $(a, b) \in G^2$. Montrer que
   (a) si a, b et $a * b$ sont des éléments finis d'ordre 2 alors $a * b = b * a$,
   (b) si a est d'ordre fini alors a^{-1} l'est aussi et a et a^{-1} ont le même ordre,
   (c) si a est d'ordre fini alors $b * a * b^{-1}$ l'est aussi et a et $b * a * b^{-1}$ ont le même ordre,
   (d) si $a * b$ est d'ordre fini alors $b * a$ l'est aussi et $a * b$ et $b * a$ ont le même ordre.